Fourierova řada

Spojitý a diskrétní případ

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Motivace

V je vektorový prostor se skalárním součinem

$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_\mathrm{n}$ je skupina ortogonálních vektorů z **V**

Ke každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ sestrojíme vektor

$$\mathbf{x}' = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{a_n}\mathbf{e}_\mathrm{n}$$

$$a_k = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k}, k = 1, \cdots, n$$

Je-li $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_\mathrm{n}$ báze, je **x** = $\mathbf{x}'$.

Skalární součin

V je vektorový prostor spojitých funkcí na $\langle a, b \rangle$ s operacemi sčítání funkcí a násobení funkcí reálným číslem. Definujeme

skalární součin funkcí f, g :

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

A normu funkce:

$$\|f(x)\| = \sqrt{(f, f)}$$

Ortogonální systém funkcí

Systém funkcí $\mathbf{F}_\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ z **V** je ortogonální,

Jestliže

- Definiční obor všech funkcí je $D_{\varphi_i} = \langle a, b \rangle \;\; \forall\, i$
- Každé 2 funkce jsou ortogonální: $\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = 0,\, i \neq j$
- Existuje-li funkce *f*, $(\varphi_i, f) = 0 \;\forall\, i = 0,1,2,\cdots$
  $\Rightarrow \|f(x)\| = 0$

Aproximace funkce polynomem

Každou funkci $f \in \mathbf{V}$ aproximujeme polynomem

$$F_n(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x),$$

tak, že: $\|f - F_n\|^2$ je minimální $\Leftrightarrow (f - F_n) \cdot \varphi_i = 0$, tj.

$$a_i = \frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}$$

Chyba aproximace

$$|R_{n+1}(x)|^2 = \|f(x) - F_n(x)\|^2 =$$

$$= \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)\right)\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)\right)$$

$$|R_{n+1}(x)|^2 \leq \|f(x)\|^2 - \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \|\varphi_i(x)\|^2$$

Trigonometrický polynom

$$\mathbf{F}_{\varphi} = \{1, \cos x\,, \sin x\,, \cos 2x\,, \sin 2x\,, \cdots, \cos nx\,, \sin nx, \cdots\}$$

je ortogonální systém trigonometrických funkcí na $\langle -\pi, \pi \rangle$

Trigonometrický polynom

$$F_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourierova trigonometrická řada

k ortogonálnímu systému funkcí

$$\mathbf{F}_{\varphi} = \{1, \cos x\,, \sin x\,, \cos 2x\,, \sin 2x\,, \cdots, \cos nx\,, \sin nx, \cdots\}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourierovy koeficienty

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, n \geq 1$$

Chyba aproximace

$$|R_{n+1}|^2 \leq \|f(x)\|^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right)$$

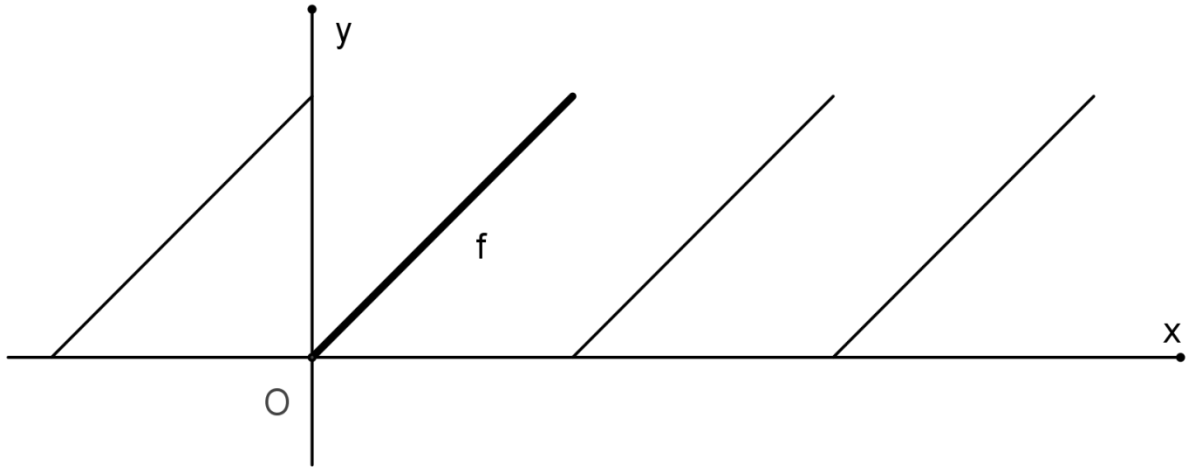
Konvergence Fourierovy řady – součet řady:

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x-} f(t) + \lim_{t\to x+} f(t)\right)$$

Přímé periodické rozšíření

f je definovaná na $\langle -\pi, \pi \rangle$, potom f periodicky prodloužíme na celé $\mathbf{R}$

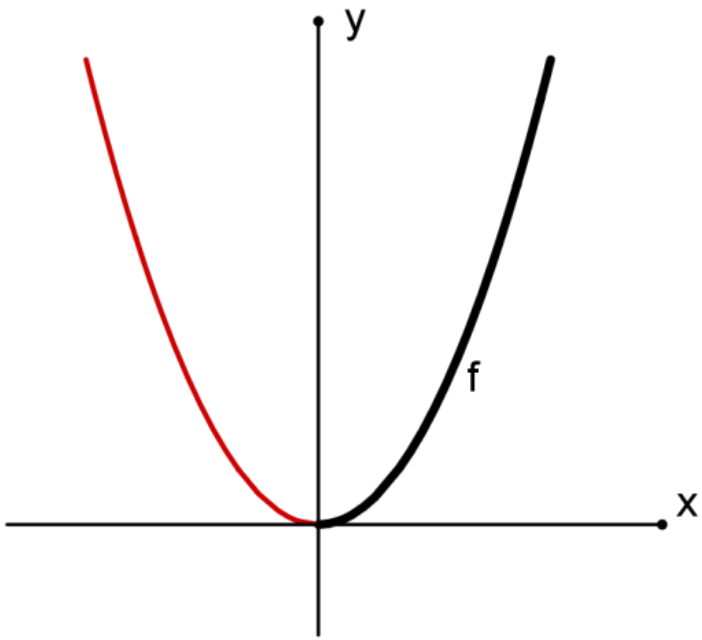
$f(x + 2k\pi) = f(x)$ pro každé $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ a k



Zdroj: autor

Sudé periodické rozšíření

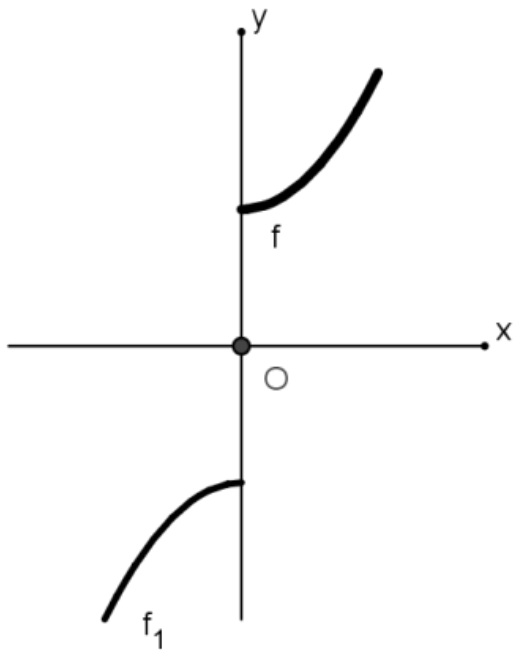
f je definovaná na $\langle -\pi, 0 \rangle$, položíme
$$f(x) = f(-x)$$



Zdroj: autor

Liché periodické rozšíření

f je definovaná na $\langle -\pi, 0 \rangle$, položíme
$$f(x) = -f(-x)$$



Zdroj: autor

Diskrétní případ

f je definovaná v bodech:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{2\pi}{m+1}, x_2 = \frac{4\pi}{m+1}, x_3 = \frac{6\pi}{m+1}, \cdots$$

potom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{L} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) + \frac{1}{2}\theta A_{L+1} \cos(L+1)x$$

Koeficienty

$$A_0 = \frac{1}{m+1}\sum_{s=0}^{m} f(x_s),$$

$$A_k = \frac{2}{m+1}\sum_{s=0}^{m} f(x_s)\cos kx_s\ ,$$

$$B_0 = 0,$$

$$B_k = \frac{2}{m+1}\sum_{s=0}^{m} f(x_s)\sin kx_s, \qquad k = 1,2,\cdots,L+1,$$