# Pojistná matematika neživotního pojištění

Michal Vyskočil

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

# Co je neživotní pojištění??

- Pojištění odvětví, která nespadají pod životní pojištění
- Pojištění
  - Majetku
  - Odpovědnosti
  - Úrazové pojištění osob

# Úloha statistiky v neživotním pojištění

- Statistika, pravděpodobnost, finanční a pojistná matematika
- Oceňování(naceňování) produktů – PRICING
- Stanovování rezerv – RESERVING
- Měření solventnosti – SOLVENCY
- Oceňování společností, portfolií

# Úloha statistiky v neživotním pojištění

- Pricing – očekávaná hodnota výše budoucí škody (Odhady momentů)
- Reserving - očekávaná hodnota výše minulé škody
- Solventnost – Odhady vysokých kvantilů (99,5 %)
- Ekonometrické modely (ESG)

# Pricing – stanovování pojistného

- Pojistné většinou počítáno jako **nettopojistné** + nákladové přirážky
- Nettopojistné stanoveno tak, aby platil tzv. **princip ekvivalence**, tj. rovnice:

  Současná očekávaná hodnota pojistného =
  Současná očekávaná hodnota pojistného plnění
- Ze statistického hlediska se tedy jedná zejména o určení očekávané hodnoty (první moment) náhodného **budoucího** pojistného plnění.

# Reserving

- Pojišťovna má za povinnost udržovat rezervy mimo jiné na **očekávané budoucí závazky ze škod, které již vznikly**
- Opět se tedy jedná zejména o určení očekávané hodnoty (první moment) náhodného **budoucího** pojistného plnění.

Používají se:

- Trojúhelníková schémata
- Modely individuálních škod

# Solventnost

- Pojišťovna musí být solventní, tj. schopná dostát svým závazkům
- Rezervy slouží pro pokrytí pouze očekávaných závazků
- **Neočekávané závazky je třeba krýt kapitálem**
- Výše kapitálu je regulována regulátorem (ČNB)
- Nestačí pouze momenty, ale je třeba **měřit riziko** možné ztráty

# Tržní ocenění rozvahových položek

- Měření kapitálových požadavků založeno na **tržním ocenění** aktiv a závazků pojišťovny.

| Tržní hodnota aktiv | Závazky a kapitál |
| --- | --- |
| Tržní hodnota aktiv je k dispozici. **Existuje** dostatečný **trh aktiv**, který poskytuje plnou informaci o tržních cenách | Tržní hodnota závazků není k dispozici. |
| | **Neexistuje trh s pojistnými závazky** |

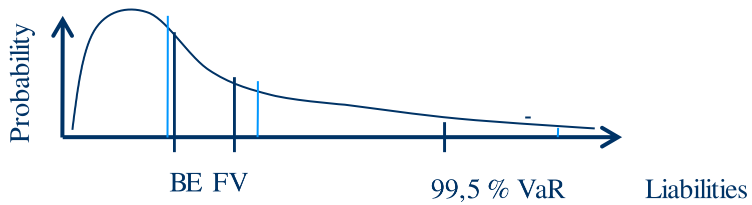
Tržní ocenění technických rezerv?

Zdroj: autor

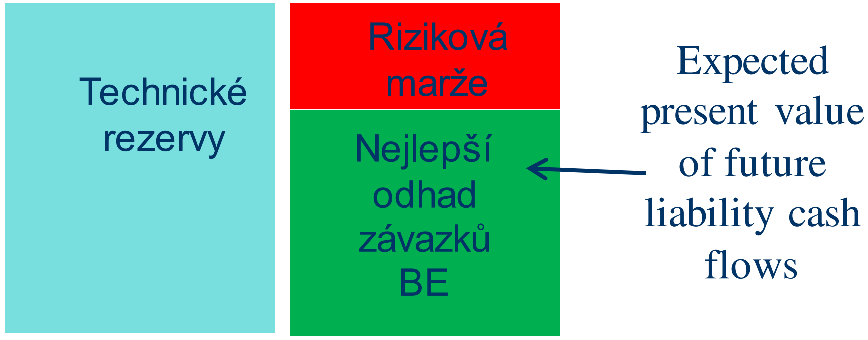
# Tržní ocenění technických rezerv

- Tržní ocenění (Fair Value) technických rezerv založeno na následujících úvahách:
- V okamžiku vyčerpání kapitálu musím za hodnotu technických rezerv převést závazky na třetí stranu.
- Třetí strana nekoupí tyto závazky, jejichž hodnota je náhodná, za očekávanou výši plnění („**BEST ESTIMATE**“), ale bude chtít odměnu za riziko, tzv. **RIZIKOVOU MARŽI.**

Riziková marže bude spočtena jako náklady na kapitál (CoC) potřebný pro krytí závazků (e.g. 6%).




Zdroj: autor



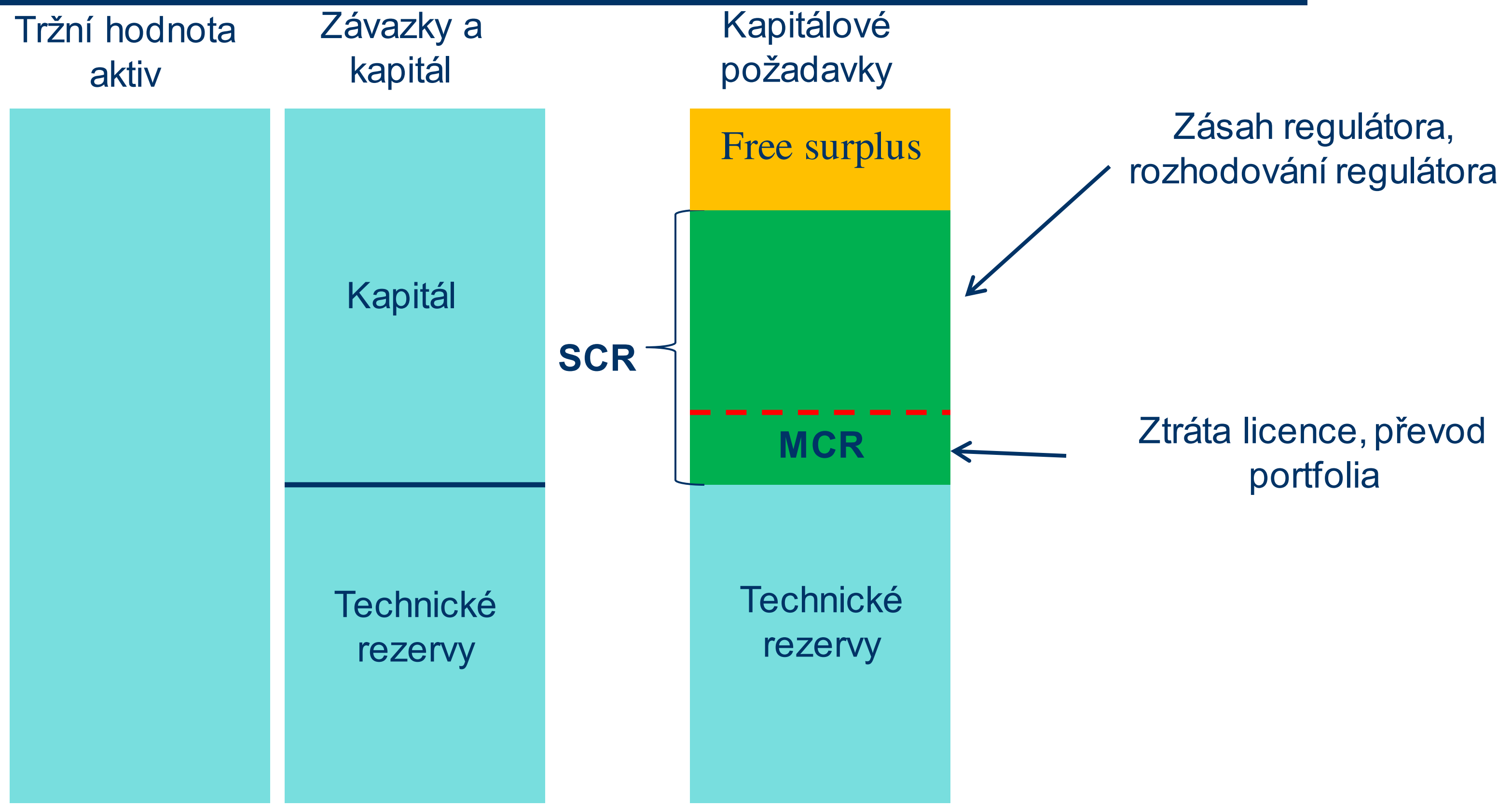

Zdroj: autor

# Dvě kapitálové úrovně

- Skutečná hodnota závazků a aktiv je náhodná. K provozování pojišťovny potřebuji mít k dispozici určitou hladinu kapitálu, abych dostál svým závazkům.
- SII (stejně jako SI) uvažuje „dvoustupňový přístup“.

- Definovány 2 kapitálové úrovně:
  - minimální kapitálový požadavek (MCR)
  - solventnostní kapitálový požadavek (SCR)

# SCR, MCR




Zdroj: autor

# Riziko pojistného

Pojistné riziko lze rozdělit na:

1. Riziko rezerv

   Riziko, změny odhadu finální výše již **vzniklých** ale ještě nezlikvidovaných škod. (Riziko změny tržního ocenění technických rezerv.)

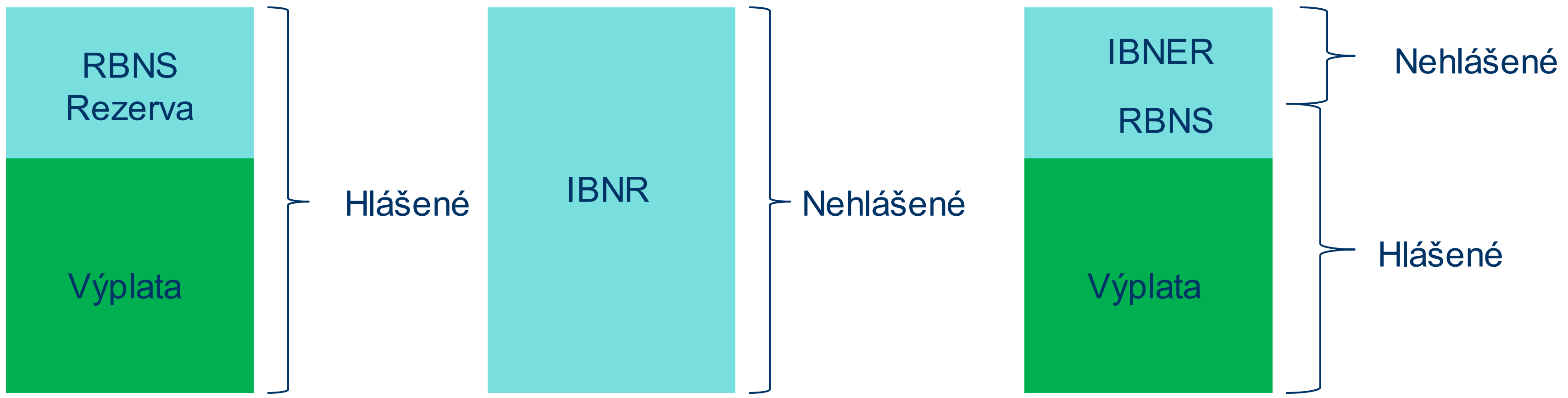
2. Riziko pojistného

   Riziko, že pojistné vybrané v následujícím roce nepokryje škody vygenerované tímto novým businessem.

# Rezervy (1/2)

- Lze odlišit rezervy na škody
  - **již hlášené** (RBNS rezervy) (*Reported but not settled)*
    - Tyto rezervy mohu přiřadit k jednotlivým škodám
    - Již hlášené škody mohou být z části vyplacené. Součet RBNS rezervy a výplaty pak představuje celkovou škodu (**incurred value**)
  - **ještě nehlášené** (IBNR rezervy) (*Incurred but not reported)*
    - Stanovené na základě poj. mat. / statistických metod
    - Většinou agregované nelze je přiřadit jednotlivým škodám
  - **již hlášené ale nedostatečně zarezervované** (IBNER rezervy)
    - Většinou jako součást IBNR

# Rezervy (2/2)



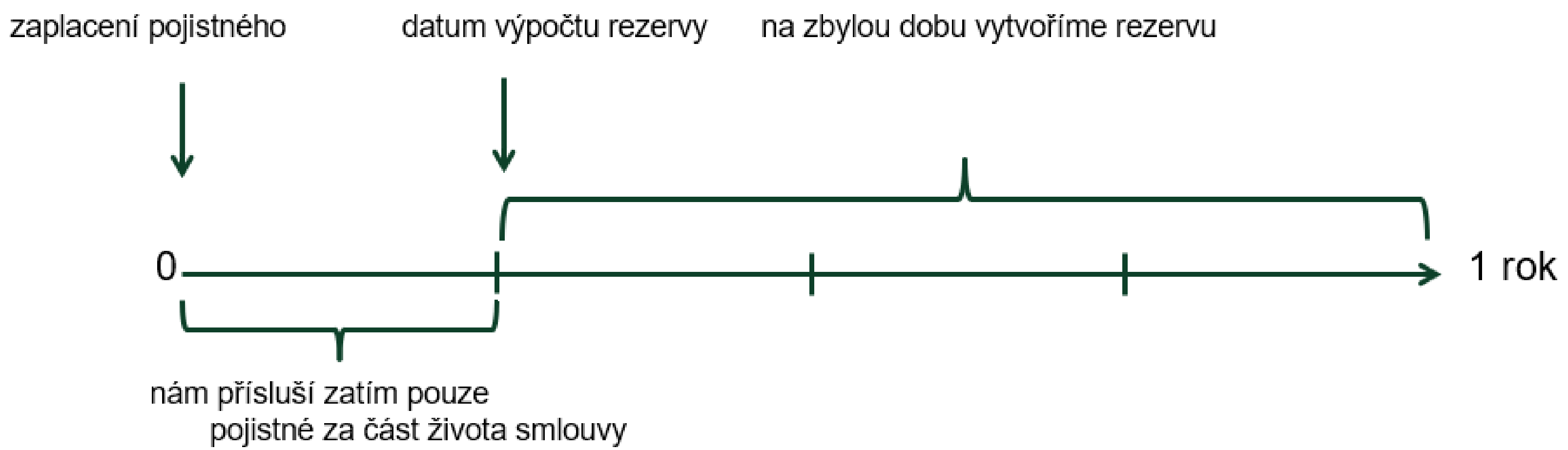

Zdroj: autor

# Základní typy rezerv

- Rezervy spojené s časovým rozlišením přijatého pojistného
  - Časové rozlišení pojistného do období, kdy jsou očekávané škody
  - Jednorázově nebo področně placené produkty
- Rezervy na plnění
  - Vyrovnávají zpoždění mezi vznikem, nahlášením a fyzickou výplatou pojistného plnění
  - IBNR, RBNS
- Speciální rezervy
  - Rezerva na splnění závazků z ručení za závazky Kancelář (ČKP)
  - Rezerva na chybné posouzení underwriting rizika (URR)

# Rezerva na nezasloužené pojistné - UPR

- Tvořená na pojistné s frekvencí jinou než měsíční
- „uchování“ části pojistného, které spadá do jiného účetního období




Zdroj: autor

- Součástí rezervy na nezasloužené pojistné je DAC (deffered acquisition costs), typicky provizní náklady
- Správní náklady spojené s akvizicí se časově nerozlišují

# Rezerva na nezasloužené pojistné - UPR

- Produkty s konstantním rizikovým profilem

- Metoda „12“ (lineární, prorata temporis)
- Tato metoda předpokládá konstantní rizikový profil po celou dobu trvání pojištění, a tedy i konstantní rizikové pojistné v čase
- Výše rezervy v čase t je pak dána vzorcem

$$UPR_t^{12} = P \times \frac{n-t}{n}$$

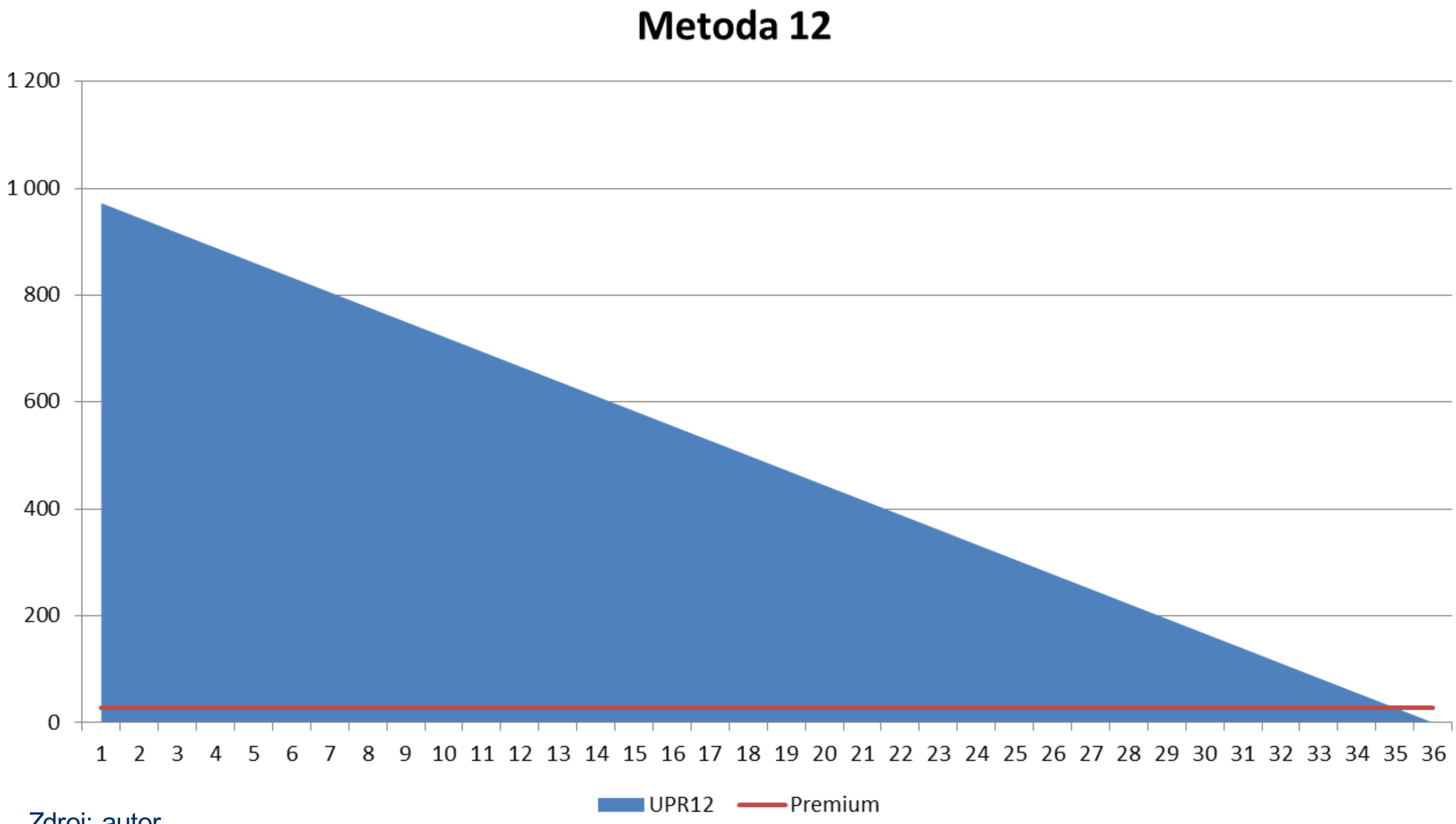
P je jednorázové pojistné zaplacené na dobu n

n je délka trvání pojištění v měsících

P/n je měsíční pojistné

Zdroj: autor

# Rezerva na nezasloužené pojistné - UPR



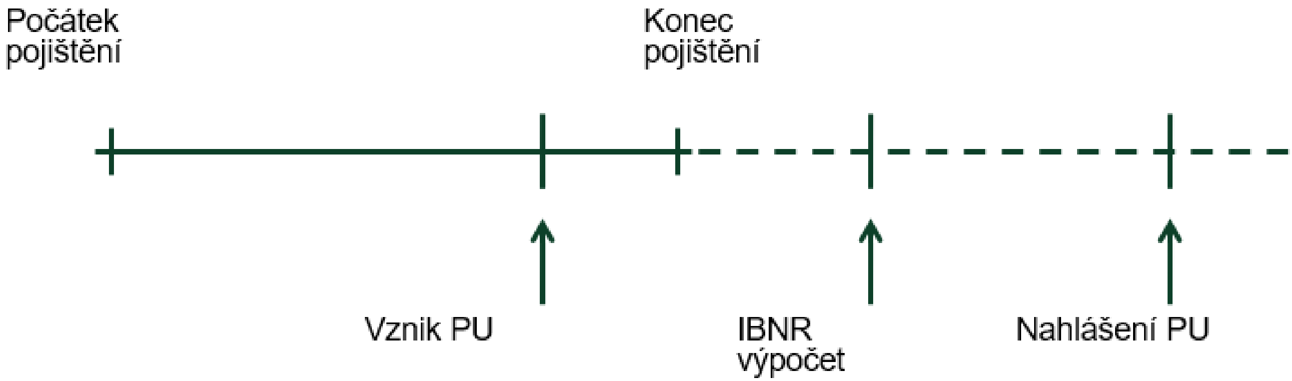

Zdroj: autor

# Rezerva na nezasloužené pojistné - UPR

- Příklad:
- Pojištění prodloužené záruky, datum počátku 1.1.2016
- Délka zákonné záruky je 2 roky
- Délka prodloužené záruky je 1 rok
- Jednorázové pojistné je 1000 Kč
- Hodnota UPR k 31.3. 2018?

# Rezerva na plnění IBNR

- Incurred But Not Reported
- Určena ke krytí závazků z pojistných událostí v běžném účetním období vzniklých, ale v tomto období nehlášených




Zdroj: autor

- Zákonná promlčecí lhůta je 3 nebo 10 let

# Rezerva na plnění IBNR

- Metoda průměrného zpoždění nahlášení pojistné události (Reporting Delay Method)
- • Používá se u portfolií, kde není možné aplikovat CH-L (např. kvůli nedostatku dat)

$$\mathrm{IBNR} = \mathrm{Df} \times ERP \times LR$$

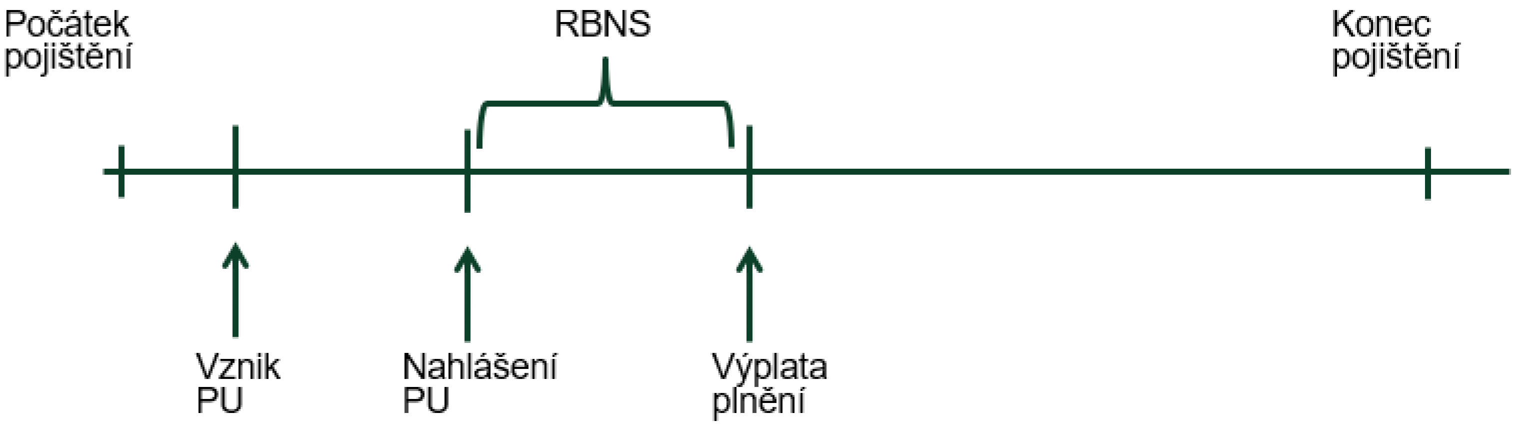
- Df je faktor zpoždění v hlášení pojistné události v kvartálech
- ERP je zasloužené rizikové pojistné za kvartál
- LR je pozorovaný škodní poměr
- Bezpečnostní přirážka: Mack, 90% kvantil lognormálního rozdělení
- Nevýhoda: s rostoucím rizikovým pojistným roste i rezerva

# Rezerva na plnění IBNR

- Chain – Ladder
- Používá se u portfolií, kde jsou k dispozici dostatečná data
- Kumulativní vývojové trojúhelníky po kvartálech (paid + incurred)
- Kombinace Chain – Ladder a Bornhuetter – Fergusonovy metody
- Cílový škodní poměr – na základě zkušeností z minulosti a expertního odhadu

# Rezerva na plnění RBNS

- Reported But Not Settled
- Určena ke krytí závazků z pojistných událostí v běžném účetním období vzniklých, nahlášených, ale v tomto období nezlikvidovaných




Zdroj: autor

# Rezerva na plnění RBNS

- Metody stanovení rezervy
  - Výpočet zohledňující budoucí vývoj na pojistné události
  - Počáteční nastavení rezervy a následné zpřesňování likvidátorem
    - Typicky v pojištění majetku
  - Výpočet v rámci stanovení IBNR z trojúhelníků

# Rezerva na plnění RBNS

- Riziko pracovní neschopnosti
  - Periodické pojistné plnění
  - Pojistné plnění – měsíční splátka
  - Používají se tzv. recovery křivky – křivka pravděpodobnosti, že klient zůstane v pracovní neschopnosti v čase

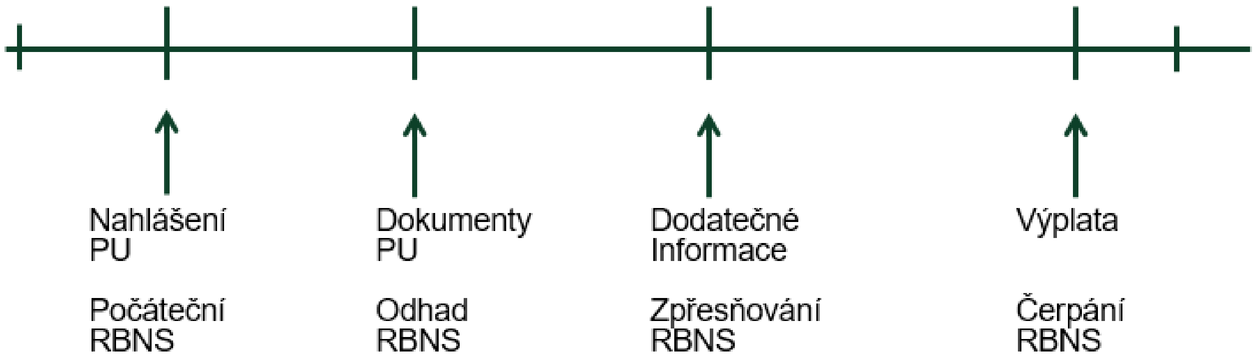
$$\mathrm{RBNS} = MI \times acc \times B$$

  - *MI* je měsíční splátka (monthly instalment)
  - *acc* je pravděpodobnost akceptace (plnění) pojistné události
  - *B* je očekávaný počet vyplacených splátek (benefitů) vypočítaný pomocí recovery křivek

Zdroj: autor

# Rezerva na plnění RBNS

- Počáteční nastavení rezervy a následné zpřesňování likvidátorem
  - Např. pojištění domácnosti, pojištění motorových vozidel




Zdroj: autor

  - Zohlednění dalších např. externích nákladů (likvidace, experti, soudní znalci, asistenční služby)

# Run off rezerv

- Zpětné vyhodnocení odhadu rezerv
- Aplikujeme pro RBNS i IBNR
- Cílem je zhodnotit přesnost minulého odhadu
- Případně korigovat metody

# Trojúhelníky

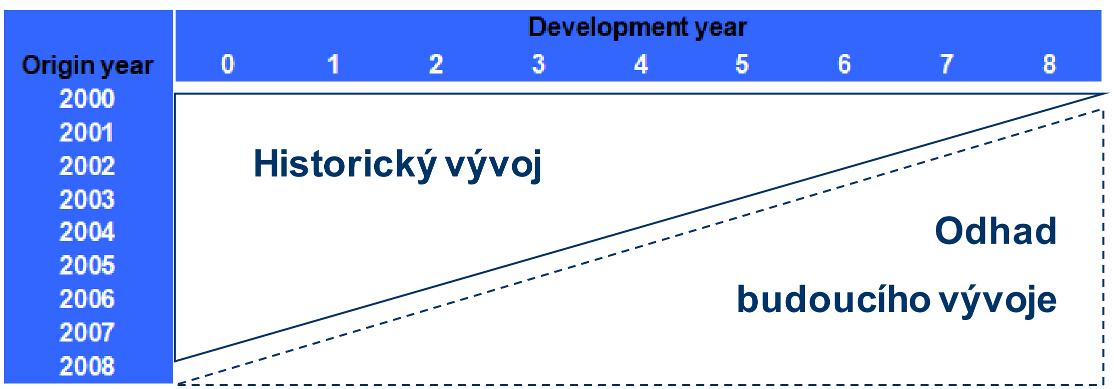
- Základním nástrojem pro odhad závazků pojišťovny je tradičně používané **trojúhelníkové schéma**
- Agregovaná data, kontingenční tabulka

| Origin year | Development year | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | ... |
| 2000 | škody z roku 2000 zaplacené 2000 | škody z roku 2000 zaplacené 2001 | ... | |
| 2001 | škody z roku 2001 zaplacené 2001 | škody z roku 2001 zaplacené 2002 | ... | |
| 2002 | ... | ... | | |
| ... | | | | |

Zdroj: autor

# Trojúhelníky

- Obecně jde o to extrapolovat historický vývoj agregátu do budoucnosti




Zdroj: autor

# Trojúhelníky

**Kumulativní**

| Origin year | Development year | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1998 | 39 740 | 85 060 | 108 350 | 116 910 | 124 588 |
| 1999 | 47 597 | 101 093 | 128 511 | 138 537 | |
| 2000 | 50 230 | 105 962 | 132 950 | | |
| 2001 | 50 542 | 107 139 | | | |
| 2002 | 54 567 | | | | |

**Vývoj výše škody do roku…**

45 320 = 85 060 - 39 740

Zdroj: autor

# Trojúhelníky

45 320 = 85 060 - 39 740

**Dekumulativní**

| Origin year | Development year | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1998 | 39 740 | 45 320 | 23 290 | 8 560 | 7 678 |
| 1999 | 47 597 | 53 496 | 27 418 | 10 026 | |
| 2000 | 50 230 | 55 732 | 26 988 | | |
| 2001 | 50 542 | 56 597 | | | |
| 2002 | 54 567 | | | | |

**Změna výše škoda v roce…**

Zdroj: autor

# Trojúhelníky

- Trojúhelník může zachycovat vývoj výplaty, celkové škody, počtu škod…

| Origin year | Development year | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | … |
| 2000 | CZK | | … | |
| 2001 | | | … | |
| 2002 | … | … | | |
| … | | | | |

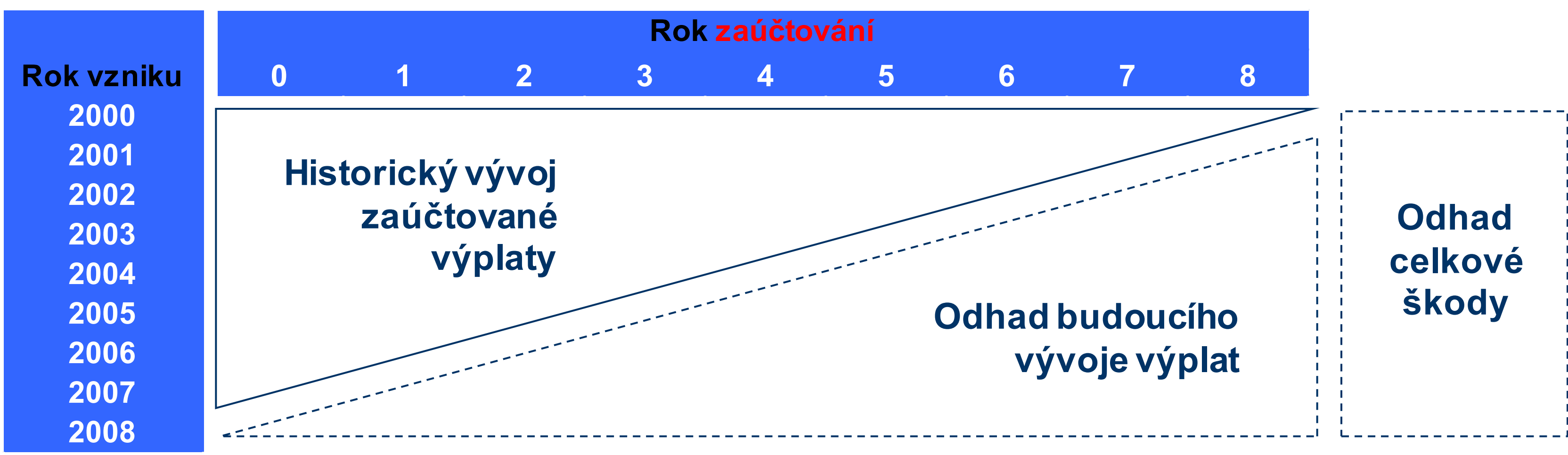
| Origin year | Development year | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | … |
| 2000 | Počet KS | | … | |
| 2001 | | | … | |
| 2002 | … | … | | |
| … | | | | |

Zdroj: autor

# Hlášené, registrované, zaúčtované..

Typické příklady:

Trojúhelník výplat: Vznik vs zaúčtování




Zdroj: autor

# Chain Ladder

- Nejznámější metoda založená na trojúhelníkovém schématu je metoda Chain-Ladder
- Vznikla historicky jako praktický nástroj bez řádného statistického podkladu
- Základní představa je, že škoda (výplata, počet…) se mezi roky vyvíjí na základě vývojových faktorů
- Ty je třeba nějak odhadnout

# Chain Ladder

- Možností pro odhad očekávaných vývojových faktorů pro budoucí roky je mnoho
- Nejjednodušší možností je prohlásit vývojové faktory z nějakého roku vzniku za „reprezentativní“ a použít je pro budoucí roky
- Lze využít aritmetický průměr individuálních v.f.

# Chain Ladder – dekumulativní

| Rok Vzniku | Rok vývoje | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 a více |
| **2010** | 300 | 250 | 230 | 150 |
| **2011** | 200 | 150 | 130 | |
| **2012** | 250 | 200 | | |
| **2013** | 350 | | | |

Zdroj: autor

# Chain Ladder - kumulativní

| Rok Vzniku | Rok vývoje | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 a více |
| **2010** | 300 | 550 | 780 | 930 |
| **2011** | 200 | 350 | 480 | |
| **2012** | 250 | 450 | | |
| **2013** | 350 | | | |

Zdroj: autor

# Chain Lader – vývojové koeficienty

| Rok Vzniku | Rok vývoje | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 a více |
| 2010 | 300 | 550 | 780 | 930 |
| 2011 | 200 | 350 | 480 | |
| 2012 | 250 | 450 | | |
| 2013 | 350 | | | |

Zdroj: autor

- $c_{1,0} = (550 + 350 + 450) / (300 + 200 + 250) = 1,8$
- $c_{2,1} = (780 + 480) / (550 + 350) = 1,4$
- $c_{3,2} = (930) / (780) = 1,2$

| Rok Vzniku | Rok vývoje | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 a více |
| 2010 | 300 | 550 | 780 | 930 |
| 2011 | 200 | 350 | 480 | 572 |
| 2012 | 250 | 450 | 630 | 751 |
| 2013 | 350 | 630 | 882 | 1052 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $C_{1,0}$ | 1,8 | | | |
| $C_{2,1}$ | 1,4 | | | |
| $C_{3,2}$ | 1,2 | | | |

Zdroj: autor

# Chain Ladder – příklad

| Dekumulativní | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Rok Vzniku** | **Rok vývoje** | | | |
| | **0** | **1** | **2** | **3 a více** |
| **2014** | 600 | 500 | 460 | 300 |
| **2015** | 400 | 300 | 260 | |
| **2016** | 500 | 400 | | |
| **2017** | 700 | | | |

Zdroj: autor

# Modely počtu škod

# Poissonovo rozdělení

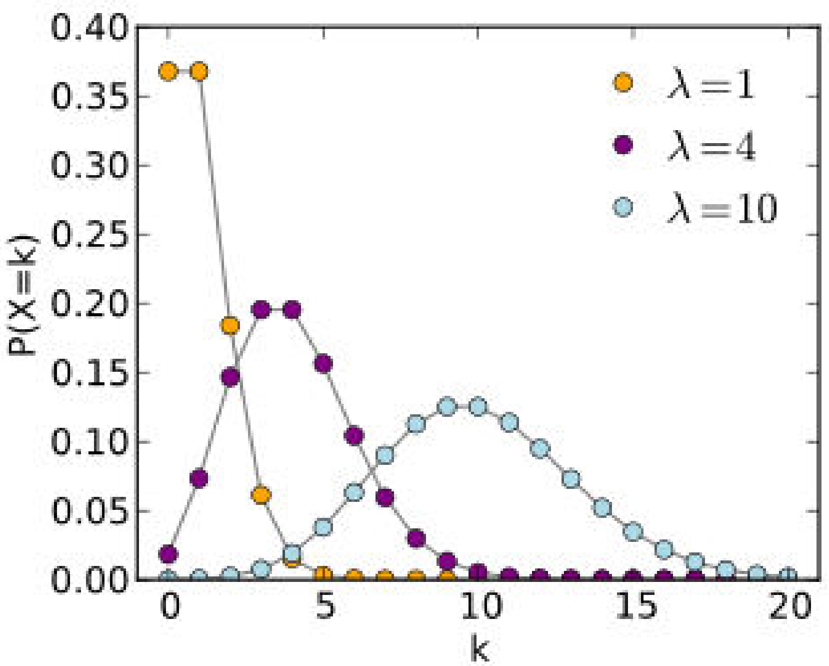
Vychází z Poissonova procesu důsledkem čehož předpokládáme pro škody:

- $E(X) = Var(X)$
- Předpoklad exponenciálního rozdělení doby mezi škodami (inter-arrival time)

# Poissonovo rozdělení

$$f(k;\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

Zdroj: autor




*EX=VarX=λ*

Pro λ>1000 konverguje k normálnímu rozdělení

zdroj: https://id.wikipedia.org/wiki/Berkas:Poisson_pmf.svg

# Negativně binomické rozdělení

Negativně binomické rozdělení

- V NP se nejčastěji používá pro modelování počtu škod v případě heterogenního kmene (předpoklad, že λ je náhodné a má gama rozdělení – ‘gamma Poisson mixture’)
- Tato extra heterogenita vede k většímu rozptylu, než je střední hodnota:

$$(EX \leq VarX)$$

# Modely výše (jedné) škody

# Modely výše (jedné) škody

Výše škody je:

- Vždy kladná
- V NP často pozitivně zešikmená (‘long tail’)
- Podobné vlastnosti jako doba do nastání události (‘lifetime’)- > rozdělení používaná v analýze přežívání (‘survival analysis’).

# Exponenciální rozdělení

- Nejjednodušší (má jen jeden parametr)
- Postaveno na předpokladu exponenciálně klesající pravděpodobnosti přesahu
- (často příliš rychlý pokles)
- Bývá pozitivně sešikmené
- Memory-lessness a konstantní hazard rate

# Exponenciální rozdělení

- Předpoklad konstantní „hazard rate“ a „memorylesness“ doby mezi událostmi
  - Hazard rate (riziková funkce) = „pravděpodobnost toho, že se stane něco teď za podmínky, že se to ještě nestal“
  - Memoryless = rozdělení si nepamatuje, co se stalo v minulosti
- Když se posunu o M let, tak to s pravděpodobnostním rozdělením neudělá nic

# Gamma rozdělení

- Flexibilnější než exponenciální rozdělení (má dva parametry)
- Exponenciální rozdělení je speciálním případem (*k=1)*
- Rozdělení doby do r-té události v Poissonově procesu (rozdělení součtu i.i.d. – (nezávislé a stejně rozdělené) exponenciálně rozdělených veličin)

# Frequency - Severity

Vývoj průměrné škody a celkového počtu škod (Frequency - Severity model)

# Frequency - Severity

- Analyzuje se zvlášť vývoj počtu škod a vývoj průměrné škody
- Trojúhelník vývoje průměrné škody se spočte jako podíl trojúhelníku celkové škody a trojúhelník vývoje počtu škod
- Trojúhelník počtu a průměru se doplní CH-L

**Konečný počet * konečný průměr**
**= konečná výše škody**

# Frequency - Severity

- It is a common actuarial assumption that: –
  - Claim Frequency has an over-dispersed Poisson distribution –
  - Claim Severity has a Gamma distribution

- Loss Cost = Claim Frequency x Claim Severity
- Can be much more complex

# Frequency - Severity

- It is a common actuarial assumption that:
  - Claim count is Poisson distributed
  - Size-of-Loss is Gamma distributed

- Therefore the loss cost (LC) distribution is Gamma-Poisson Compound distribution, called Tweedie distribution –
  - $LC = X1 + X2 + \ldots + XN$
  - $Xi \sim \text{Gamma}$ for $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$
  - $N \sim \text{Poisson}$

# Bornheuter-Ferguson

- Lze opět použít na troj. celkové škody, ale i na troj. výplat.

- Předpokládá se navíc:
  - Znalost zaslouženého pojistného $P_i$
  - A odhad škodního poměru $r_i$

$$r_i = \textit{konečná výše škody v i / zasl. pojistné v } \underline{i}$$

- => Lze určit apriorní odhad konečné výše škody

$$U_i^{I} = r_i P_i$$

- Apriorní odhad není spočten z trojúhelníku.

# Bornheuter-Ferguson

- Dále lze spočíst vývojové faktory.
- A z nich vývojové faktory „od teď do konce“ tj. „z diagonály na konec“.

$d_{k+1-i}$ (zjednodušíme značení na $d_i$)

- Z nich lze na základě apriorních odhadů $U_i^{I}$ spočíst kolik by mělo být pro dané *i* dnešní výše škody (hodnota na diagonále), pokud by se škoda vyvíjela dle $d_i$ :

$$U_i^{I} / d_i$$

# Bornheuter-Ferguson – Emerging liability

- Na základě těchto předpokladů by se tedy ještě mělo objevit

$$U_i^I - U_i^I / d_i = U_i^I (1-1/d_i)$$

- tzv. “emerging liability”
- Odhad finální výše škody B-F metodou je pak součet již hlášené škody a emerging liability

$$U_i = C_{i,k+1-i} + (1-1/d_i)\, U_i^I$$

- Odhad je kombinován z apriorního odhadu $U_i^I$ a odhadu $d_i$ z trojúhelníku.

# Bornheuter-Ferguson

- Lze tedy psát:

$$U_i = Z_i \, d_i \, C_{i,k+1-i} + (1- Z_i) \, U_i^{I}$$

- Vážený průměr
- Kredibilitní formule
- $Z_i = 1/ d_i$ klesá s $i$
- V trojúhelníku je pro novější roky vzniku méně dat, proto má menší váhu odhad z troj. a vetší váhu apriorní odhad

# Rozdělení celkové škody

# Kolektivní model rizika

- $S = X_1 + X_2 + \ldots.. + X_N$
  - Součet náhodného počtu náhodných veličin
  - S = celková škoda
  - N = náhodný počet škod
  - $X_1 + X_2 + \ldots.$ = výše 1. škody, 2. škody, ….
  - $X > 0$
  - Modeluji škodu po škodě

# Kolektivní model rizika

- Složené rozdělení
  - Rozdělení se zde určuje podle rozdělení náhodného počtu škod (hlavně Poissonovo rozdělení)
  - Předpoklady (zjednodušující)
    - $X_i$ jsou iid….nezávislé a stejně rozdělené
    - N nezávisí na $X_i$ (počet škod nezávisí na jejich výši)

# Kolektivní model rizika

- Potřebujeme znát střední hodnotu S (celková škoda)
  - Rozdělení dle rozdělení N
  - $E(S) = E_N(E(S/N)) = E(X) * E(N) = E(S)$

# Individuální model rizika

- $S = Y_1 + Y_2 + \ldots. + Y_n$
  - S = celková škoda
  - n = NENÍ náhodné – počet rizik (pojistek, pojištěných)
  - $Y_i$ = výše škody, která vznikla na i-tém riziku
  - Má vždy více členů než v případě kolektivního modelu rizika
  - Valná většina Y je 0
  - Modeluji riziko po riziku

# Individuální model rizika

- Na jedné pojistce může vzniknout maximálně jedna škoda
- Model povoluje i neidentické nezávislé proměnné → nepředpokládáme IID, ale pouze ID

# Teorie kredibility

- Nemusíme mít vždy relevantní data → problém → řešením jsou data z externího zdroje
- Snažíme se odvodit, jakou váhu budeme přisuzovat informaci z interního zdroje a jakou váhu budeme přisuzovat informaci z externího zdroje
- Budeme dedukovat přes Bayesovskou statistiku

# Bayesovská statistika - základy

- Klasická statistika
  - Fixní náhodný parametr – ne veličina
  - Pro odhad děláme náhodný výběr
    - Ten neznáme, ale víme, že je náhodný
      - Náhodná veličina je vektor, který představuje náhodný výběr
- V Bayesovské statistice předpokládáme, že máme číslo a to, co odhadujeme neznáme
  - Nemáme náhodný výběr, náhodný je odhadovaný parametr

# Bayesovská statistika - základy

- Bayesův vzorec
  - $B_1$, $B_2$, …., $B_k$ = úplný systém neslučitelných jevů (jevy nemají průnik, nastane vždy právě jeden z jevů)
  - Sledovaný jev A

$$P(B_k/A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B_k).P(B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A/B_i).P(B_i)}, \quad 1 \leq k \leq n$$

Zdroj: autor

- Vzorec inverzní pravděpodobnosti
  - Na základě $P(A/B_k)$ spočítáme $P(B_k/A)$
  - Bayesův vzorec dynamicky zahrnuje informace o riziku/výrobku…

# Bayesovská statistika - základy

- Apriorní informace
  - to, co víme nebo si myslíme předem, ještě před získáním dat
- Věrohodnost
  - Pravděpodobnost toho, že naměříme daná data při daném parametru
- Aposteriorní informace
  - Je poměrem celkové pravděpodobnosti hypotézy k součtu všech celkových pravděpodobností našich hypotéz. Z toho také vyplývá, že teprve hodnoty aposteriorní pravděpodobnosti dávají dohromady 1
- Známe apriorní informace ve formě apriorního rozdělení f(a), které dává informace o parametru „a“, toto info nepochází z našich dat (jiný kmen, expertní názor) → toto rozdělení známe před provedením náhodného výběru

# Klasická teorie kredibility

- Neznámý parametr se náhodná konstanta, k jeho výpočtu potřebujeme náhodný výběr a jeho váha záleží jen na počtu pozorování

# Klasická teorie kredibility - plná teorie kredibility

- Z = kredibilitní faktor
- Nastane, když z=1 → můžeme dát plnou váhu jen vlastnímu pozorování
- Jde o  to, kolik pozorování k tomu potřebujeme
- Pravděpodobnost, že absolutní odchylka odhadovaného parametru od skutečné výše je menší nebo rovna k procentu z neznámého parametru (je větší nebo rovna 1-alfa

# Klasická teorie kredibility - plná teorie kredibility

- Pokud toto platí, nejsou třeba externí data a z=1
- Pokud nemáme dost pozorování, spočteme „z“ tak, aby kredibilitní koeficient * odhad z našich dat fluktuoval stejnou měrou jako v případě plné kredibility

# Klasická teorie kredibility - teorie částečné kredibility

- $z = \sqrt{}$ (počet pozorování / počet pozorování potřebný k plné kredibilitě)

- Pokud nemáme dost pozorování, větší váhu dostane externí zdroj

# Bayesovská teorie kredibility – vlastnosti kredibilitního faktoru

- Čím přesnější apriorní informace (nižší variabilita apriorního rozdělení), tím větší váhu dám na expertní data

- Čím více vlastních dat, tím větší váhu má „z“ (jako u klasické teorie), nemáme-li vlastní data, pak „z“ = 0

# Bayesovská teorie kredibility

- Snažíme se nalézt odhad nějakého parametru takový, který v sobě sdružuje informace, které mám mimo vlastní portfolio a zároveň z mých vlastních dat
- Kredibilitní formule

$$U_i = Z_i \underbrace{d_i C_{i,k+1-i}}_{\text{Odhad z trojúhelníku}} + (1 - Z_i)\underbrace{U_i^{I}}_{\text{Počáteční odhad}}$$

Zdroj: autor

- $Z_i = 1/d_i$ klesá s $i$
- V trojúhelníku je pro novější roky vzniku méně dat, proto má menší váhu odhad z troj. a vetší váhu apriorní odhad

# Systém Bonus - Malus

- Bezeškodní rok → dostaneme slevu
  - Když ne, tak buď nemáme slevu, možná dostaneme i nějakou přirážku (malus)
- V reálu spíše NCD (no claims discount), tzn. Bez malusu – sleva za bezeškodní rok, jinak nic
- Hlad po bonusech
  - Řidiči nebudou hlásit malé škody, protože by neměli velké bonusy

# Systém Bonus - Malus

- Bonusy
  - Lineární
    - Např. 5 % za bezeškodní rok
    - Klasické, všichni s tím začínají
  - Nelineární
    - Jde o to, že první 3 roky nic neznamenají, ale čtvrtém bonus hodně vyskočí nahoru (5 % → 20 %)
- Bonus = počet diskrétních stavů, ve kterých se člověk nachází

# Systém Bonus – Malus Markovovy řetěrce

- $\{X_n, n \in N_0\}$ …posloupnost náhodné veličiny
- $X_n$ nabývá pouze celočíselných hodnot
- „n“ index času, začíná ve v nule
- Diskrétní počet v diskrétním čase

  všechny možné hodnoty tvoří množinu stavů **S**

# Systém Bonus – Malus Markovovy řetězce

- **S** = {0, 1, 2, ... , N}
- Tato posloupnost je Markovův řetězec s diskrétním časem a množinou stavů S, pokud platí, že když máme daný předchozí stav, tak to, co se stane v budoucnu, záleží pouze na tom, co se stalo v posledním známém roce, vše ostatní mohu zapomenout
- $X_{n+1}$ je **závislá** na $X_{n-1}$ **podmíněně** za podmínky znalosti $X_n$

# Systém Bonus – Malus
# Markovovy řetězce

- Nejčastější modely jsou homogenní řetězce
  - Předchozí pravděpodobnosti nezávisí na čase
  - Je jedno, v jakém čase přecházím mezi stavy, pravděpodobnost je pořád stejná – přechod přes tzn. Přechodovou matici

# Teorie ruinování

- Ruinováním chápejme skutečnost, že v určitém časovém okamžiku přebytek pojišťovny klesne do záporných hodnot.
- Ke sledování přebytku je třeba nejen modelovat celkovou škodu z pojistných událostí, ale je také zapotřebí zahrnout inkasované pojistné, investiční příjmy a výdaje atd.

# Teorie ruinování

- Pojem ruinování označuje situaci, kdy je pro pokrytí škod v daném odvětví třeba dodatečných kapitálových prostředků

# Teorie ruinování

- Jedna ze základních formulací modelu teorie ruinování vychází z představy, že pojišťování bude probíhat za stejných podmínek po nekonečně dlouhou dobu a že sledujeme výši prostředků pojišťovny vždy v diskrétních časových okamžicích (například na konci každého roku).

# Teorie ruinování

- $U_t = u + P_t - X_1 + \cdots + X_t)$
  - „u“ je počáteční výše prostředků přidělených uvažovanému odvětví
  - „P” je pojistné za jeden rok
  - „$X_i$“ představuje celkovou výši škodních nákladů v roce i

# Teorie ruinování

- Předpoklad neměnnosti podmínek pojišťování se odráží ve skutečnosti, že pojistné P se v čase nemění, a je vyjádřen rovněž předpokladem, že náhodné veličiny X1, X2,... mají stejné rozložení.
- Dále předpokládáme, že škodní úhrny v jednotlivých letech jsou vzájemně nezávislé.
- Dále předpokládáme, že škodní úhrny v jednotlivých letech jsou vzájemně nezávislé.

# Teorie ruinování

- Při studiu pravděpodobnosti ruinování se obvykle vyznačuje její závislost na počátečním kapitálu „u“
- $\psi(u) = P\ (U_t < 0$ pro nějaké $t \in \{1, 2, ...\})$ .