EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

WWW.VSE.CZ

Pojistná matematika 1BP305

Michal Vyskočil
KBP VŠE
ZS 18/19

Kontakt

Radová

- Tel: 224 095 102
- E-mail: radova@vse.cz
- Místnost 180 NB
- Konzultace
  - viz ISIS

Vyskočil

vyskocil.michal@centrum.cz

40NB

dle dohody emailem

Literatura

- Tomáš Cipra: Pojistná matematika – teorie a praxe

Termíny testů

1. průběžný test:

- Probraná látka (ŽP)

2. závěrečný test: (možnost výběru termínu)

- Ve zkouškovém období
- ISIS
- Opravný termín ústně

Klasifikační stupnice

Známka	počet bodů
1	90-100
2	75-89
3	60-74
4+	50-59
4	méně než 50

zdroj: autor

Příklad

- Složené úročení a diskontování částky 1000 Kč??

Roky	4%	10%
1	1040	1 100
5	1216,65 = 1000 . $1{,}04^5$	1 610,51
10	1480,24	2 593,74
20	2190,12	6 727,50
30	3243,40	17 449,40

zdroj: autor

Jaká částka dá vzniknout 1 000 Kč po deseti letech při 12% p. a.?

$$P = S \cdot v^{n} = 1000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}12} \right)^{10} = 321{,}97$$

zdroj: autor

Příklad

- Jak roční úroková míra zúročí za 10let částku 50 000 na 100 000? (Jaká úroková míra zdvojnásobí za 10 let náš kapitál)

Řešení

- Jak roční úroková míra zúročí za 10let částku 50 000 na 100 000? (Jaká úroková míra zdvojnásobí za 10 let náš kapitál)

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{100000}{50000}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 = 0{,}0718,$$

zdroj: autor

Příklad

- Za kolik let zúročí roční úroková míra 10% částku 50 000 na 100 000? (Za jak dlouho 10% úroková míra dvojnásobí kapitál)

Příklad

- Za kolik let zúročí roční úroková míra 10% částku 50 000 na 100 000? (Za jak dlouho 10% úroková míra dvojnásobí kapitál)

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{1000000}{50000}\right)}{\ln(1+0{,}1)} = 7{,}27\,\text{let}$$

zdroj: autor

Příklad

- Výstavby hotelu má probíhat podle následujícího investičního projektu: okamžitě se nakoupí pozemek za 5 mil. Kč a investuje se 10mil Kč do zahájení výstavby. Částky ve výši 10mil Kč budou nutné ještě investovat do stavby po 1. roce a 2. letech. Po 2- letech bude možné nedokončenou stavbu prodat za 40mil Kč.
- Je tato investice výhodná při srovnatelném výnosu 7%?

Řešení

$$PV = -5\,000\,000 - 10\,000\,000 + \frac{-10000000}{1+0{,}07} + \frac{40000000 - 10000000}{(1+0{,}07)^2}$$

1 857 367 >> 0 (významně větší než 0)

Tato investice je výhodná (avšak jen z hlediska výnosnosti)

zdroj: autor

Příklad

- Kupónová obligace (kupónový dluhopis) s nominální hodnotou 1000 Kč a roční úrokovou sazbou (tzv. kupónovou sazbou) 6% má dobu splatnosti 3 roky.
- Je zakoupení této obligace výhodné, jestliže se prodává za 900 Kč a míra zisku srovnatelných CP je 9%?

Řešení

$C_0 = -900$

$C_1 = 60$ (kupón 6% z 1000)

$C_2 = 60$ (kupón 6% z 1000)

$C_3 = 1060$ (kupón 6% z 1000 + vrácení nominální hodnoty)

$$-900 + \frac{60}{1+i^*} + \frac{60}{(1+i^*)^2} + \frac{1060}{(1+i^*)^2} = 0$$

$|\, i^* = 0{,}1002 = 10{,}02\% >> 9\%$ (investice je výhodná)

zdroj: autor

Příklad

- Půjčka má být bance splacena 5 splátkami ve výši 100 000 Kč postupně na konci prvního až pátého roku. Lze ale dluh mimo jiné vyrovnat jednorázově a to buď na začátku prvního roku, a nebo na konci pátého roku.
- Jaké jsou takové jednorázové platby (úvěrová úroková míra 15% p.a.)

Řešení

Jedná se o výpočet PV a FV polhůtního důchodu:

$$PV = 100000 \cdot \frac{1 - v^5}{i} = 100000 \cdot \frac{1 - (1/1{,}15)^5}{0{,}15} = 335216\,Kč$$

$$FV = 100000 \cdot \frac{(1 + 0{,}15)^5 - 1}{0{,}15} = 674238\,Kč$$

zdroj: autor

Příklad

- Úvěr ve výši 280 000 Kč má být splacen splátkami na konci jednotlivých let, přičemž první splátka obsahuje úmor 10 000Kč a každá následující obsahuje úmor vždy o 10 000Kč vyšší než v předchozí splátce.
- Sestavte umořovací plán (8% p. a.)

Řešení

Stav na konci roku	*Splátka*	*Úmor*	*Úrok*	*Zůstatek dluhu*
0	-	-	-	280 000
1	32 400 = (10 000 + 22 400)	10 000	22 400 = 0,08 . 280 000	270 000 = 280 000 – 10 000
2	41 600	20 000	21 600 = 0,08 . 270 000	250 000 = 270 000 – 20 000
3	50 000	30 000	20 000	220 000
4	57 600	40 000	17 600	180 000
5	64 400	50 000	14 400	130 000
6	70 400	60 000	10 400	70 000
7	75 600	70 000	5 600	0
Součet		280 000		

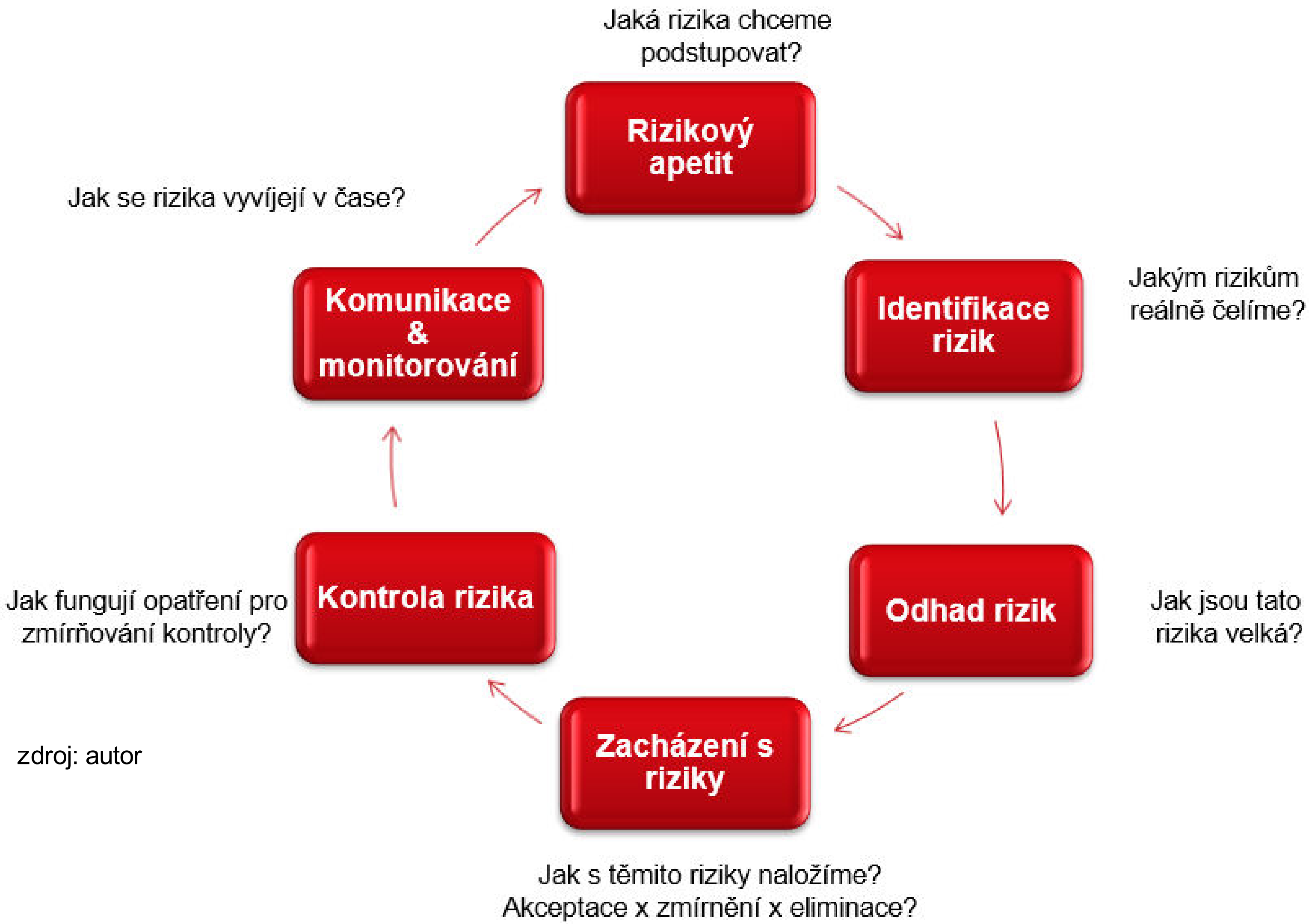
zdroj: autor

Risk management

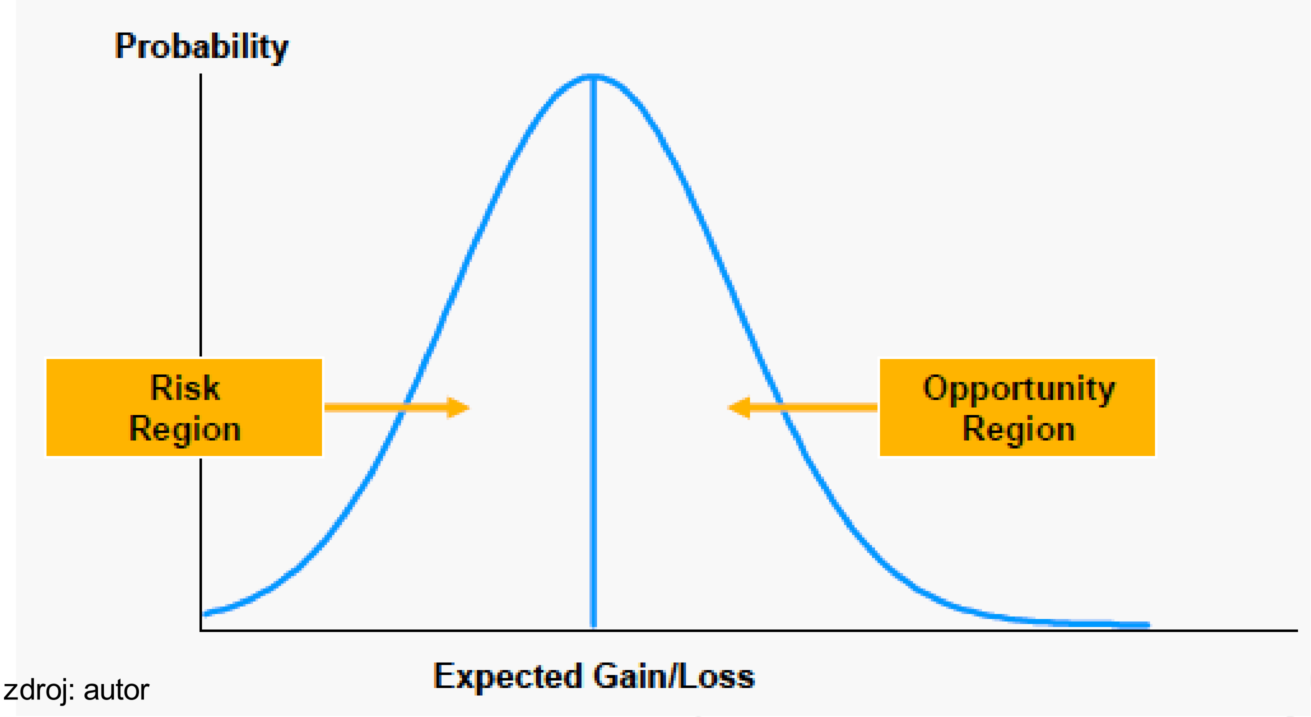
- Definice rizika
  - Náhodná nezáporná veličina
  - Riziko = nejistota budoucího vývoje (možnost zisku i ztráty) – bez rizika nejsou příležitosti, tedy ani zisk pro společnost

- Jaké znáte druhy rizik??

Jak funguje řízení rizik?



zdroj: autor


Probability
Risk Region
Opportunity Region
Expected Gain/Loss

zdroj: autor

Pojistná matematika

- Co si pod tím můžeme představit?
  - Pojistná matematika je aplikovaná matematika v pojišťovnictví
  - Popisuje pojistné procesy pomocí matematických modelů z oblasti teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky

Pojistná matematika

- Pricing
- Reserving
- Solvency

Role pojistného matematika

- Spolupráce s odděleními napříč pojišťovnou
  - Business, Finance, Operations, IT, Právní, Risk, TOP managementem
- Kalkulace sazeb pojistného
- Tvorba pojistných produktů
- Stanovení pojistných a soupojistných schémat
- Risk monitoring
- Kalkulace technického výsledku – proces závěrek
- Reporting a regulatorní požadavky
- Účast na klíčových projektech
- Nastavení zajistných a soupojistných schémat
- Účast na obchodním plánování (Budget)
- Spolupráce na IT implementaci
  - Nové produkty, regulatorní požadavky, automatizace

Úmrtnostní tabulky

- zlepšování úmrtnostních charakteristik
- úmrtnost ženské a mužské populace
- problematika selekce a antiselekce
- bezpečnostní přirážka pojišťovny
- odhad q_x vlastní
- úprava celonárodních tabulek, vyrovnávání

Příklady na pravděpodobnosti

Porovnejte pravděpodobnost, že 20-ti letá osoba bude žít dalších 40 let, s pravděpodobností, že 50-tiletá osoba bude žít dalších 10 let.

$$_{40}p_{20} = \frac{l_{60}}{l_{20}} = 0{,}8814 < {}_{10}p_{50} = \frac{l_{60}}{l_{50}} = 0{,}9235$$

Jaká je pravděpodobnost, že se matka a dcera dožijí 50 let. Matce je 45 a dceři 20 let

- Podobně jako v předchozím příkladě

$$_{5}p_{45} \cdot {}_{30}p_{20} = \frac{l_{50}}{l_{45}} \cdot \frac{l_{50}}{l_{20}}$$

zdroj: autor

Příklad – dožití dvou osob

Uvažujte sourozence ve věku 30 a 35 let.

- S jakou pravděpodobností budou oba za 30 let naživu?
- Jaká je pravděpodobnost, že za 30 let budou naživu oba, ale za 40 let už jen jeden z nich?

(využijeme pravděpodobnost – současně nastanou dva nezávislé jevy, P=P1.P2)

Řešení

- Předpokládáme, že dožití prvního (P(A)) a dožití druhého (P(B)) jsou vzájemně nezávislé jevy, platí potom

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = {}_{30}p_{30} \cdot {}_{30}p_{35} = \frac{l_{60}}{l_{30}} \cdot \frac{l_{65}}{l_{35}} = 0{,}7281$$

- Jsou možné dva scénáře: A-dožije se první a zemře druhý nebo B-zemře první a dožije se druhý, zřejmě také se jedná o vylučující se jevy neboť nemohou nastat současně, platí (první součin – musí oba přežít 30 let než začneme uvažovat oba scénáře)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = {}_{30}p_{30} \cdot {}_{30}p_{35} \cdot ({}_{10}p_{60} \cdot {}_{10}q_{65} + {}_{10}p_{65} \cdot {}_{10}q_{60}) = 0{,}2658$$

zdroj: autor

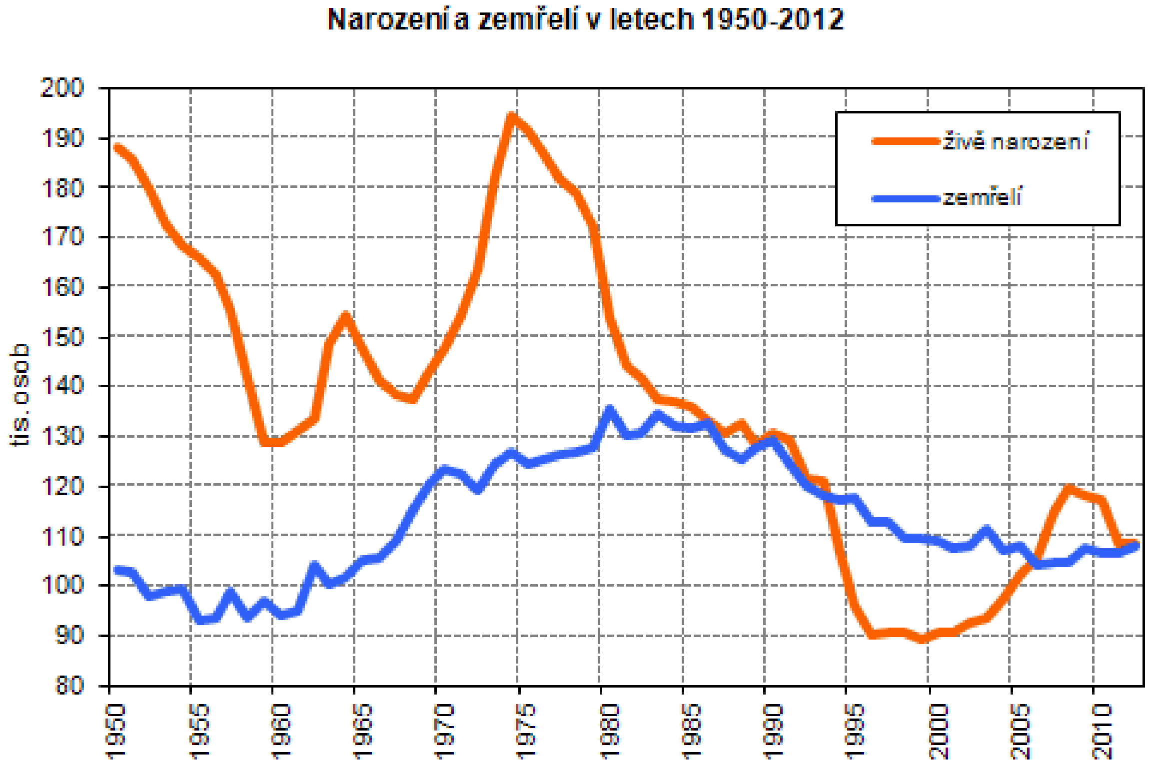
Příklad

- Jaká je pravděpodobnost, že dvacetiletá osoba zemře během jednoho roku
- Jaká je pravděpodobnost, že 22 letá osoba zemře mezi 55. a 65. narozeninami
- S jakou pravděpodobností bude žít 21 letá osoba ještě 5 let
- S jakou pravděpodobností budou dva muži – synovec 21 let a jeho strýc 65 let-
  - Živi za 20 let
  - Mrtvi za 20 let

Praktický pohled na ÚT

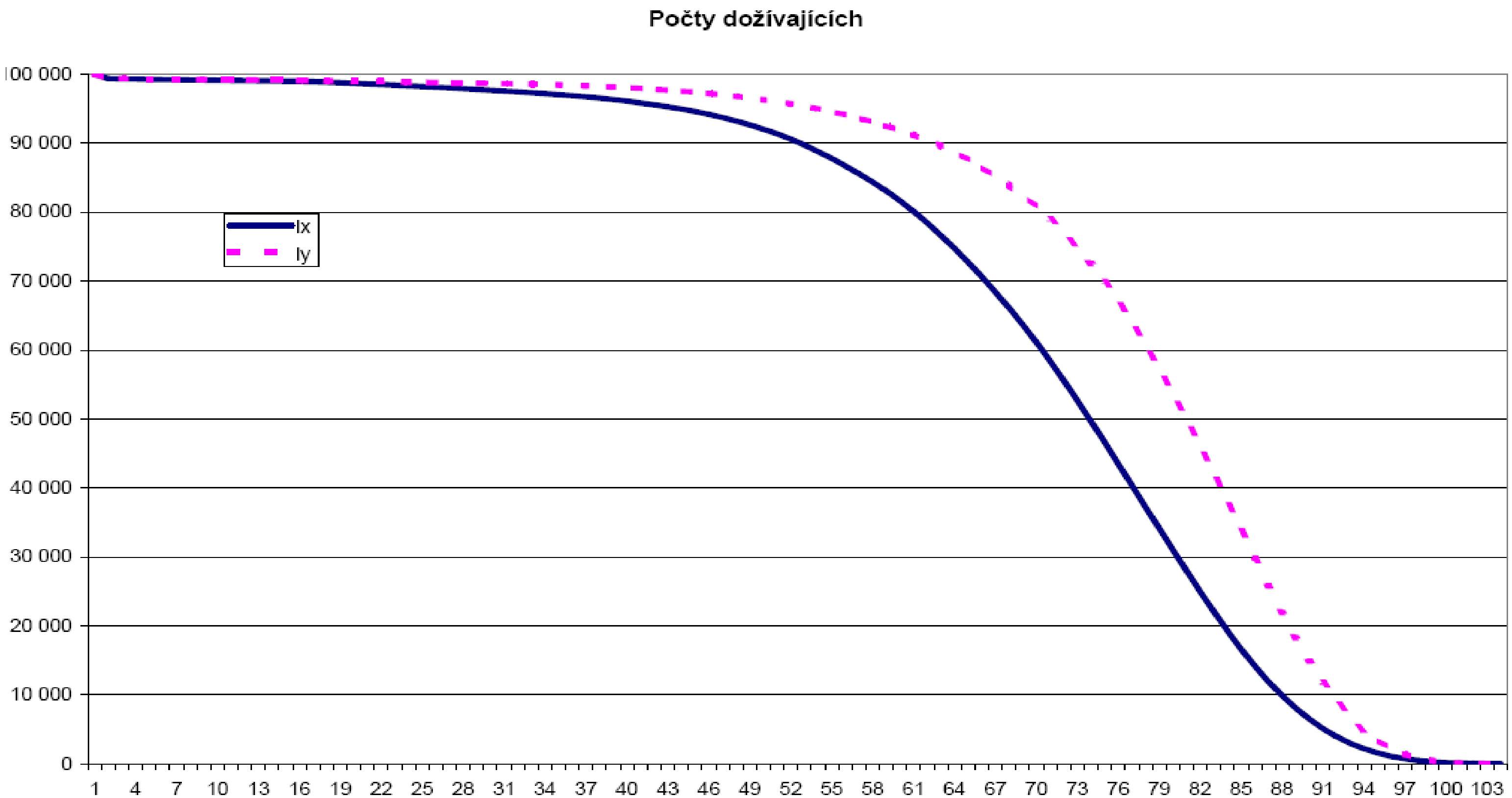
- Úmrtnost ženské a mužské populace – EU
- Problematika selekce + antiselekce
  - Souvislost se zdravotními faktory
  - Selekční úmrtnostní tabulky
- Bezpečnostní přirážka
  - Implicitně zohledněná v ÚT
  - Formy
    - Věkové posuny
    - Navýšení/snížení q_x podle druhu pojištění

Narození a zemřelí v letech 1950 - 2012



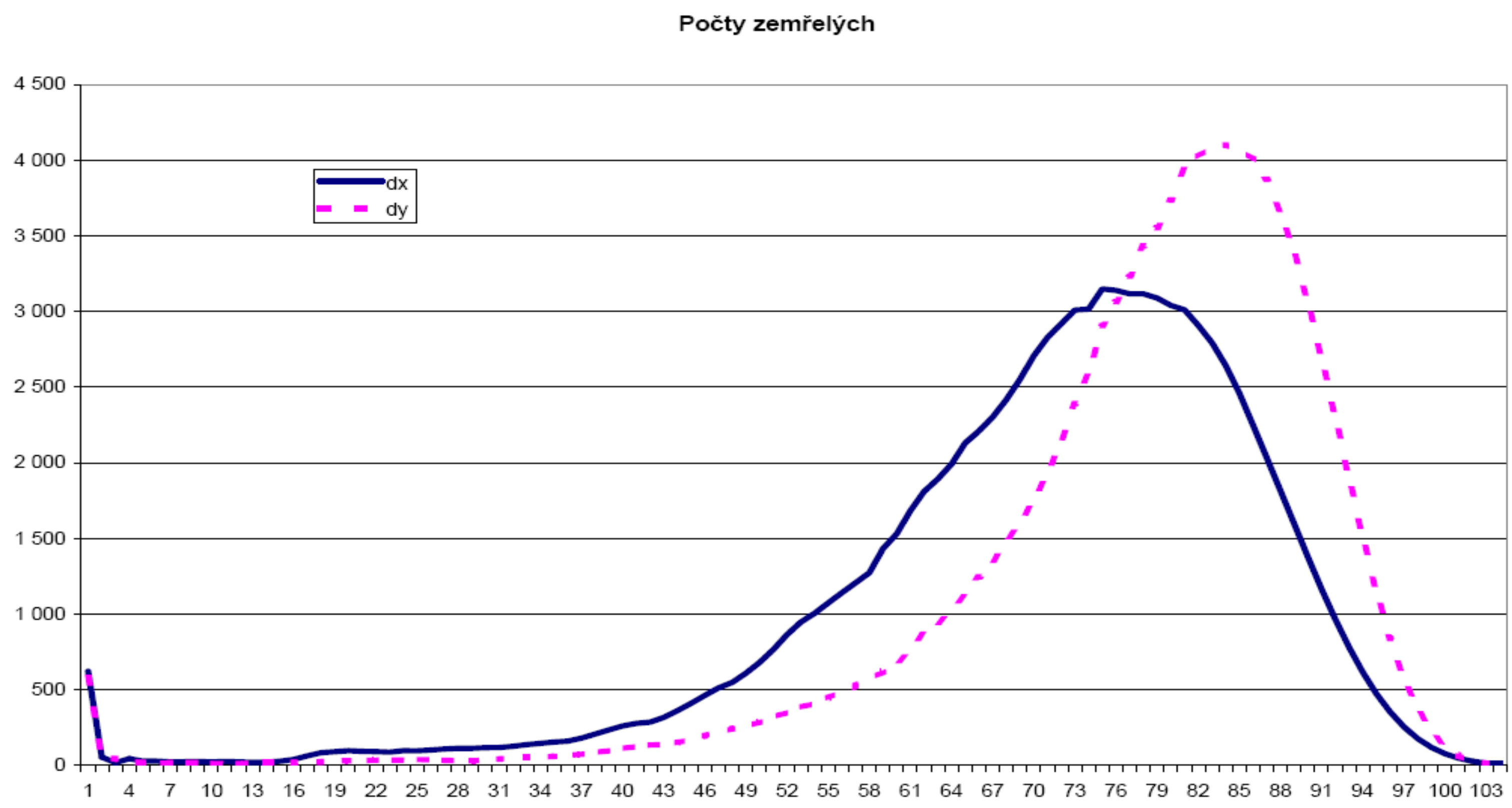
zdroj: český statistický úřad

Počty dožívajících se



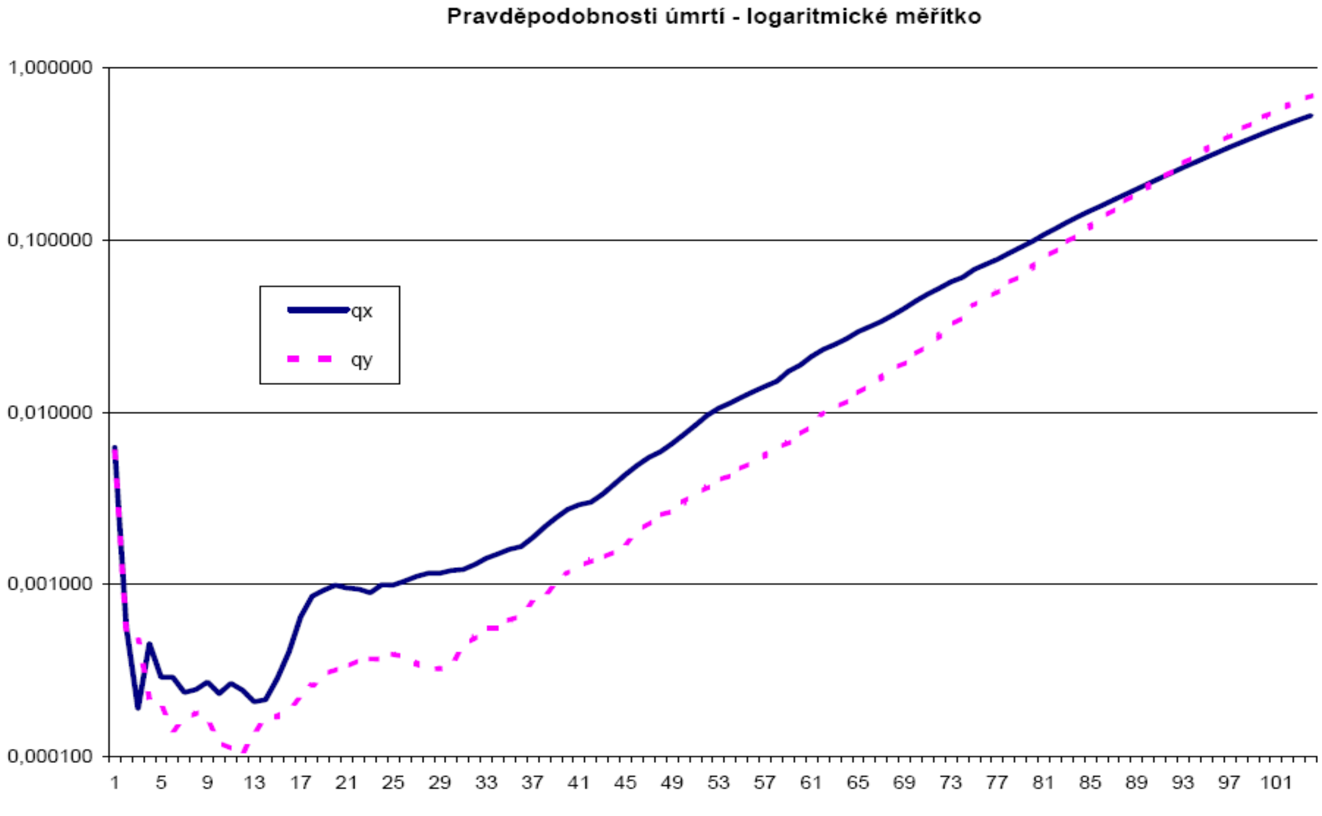
zdroj: český statistický úřad

Počty zemřelých



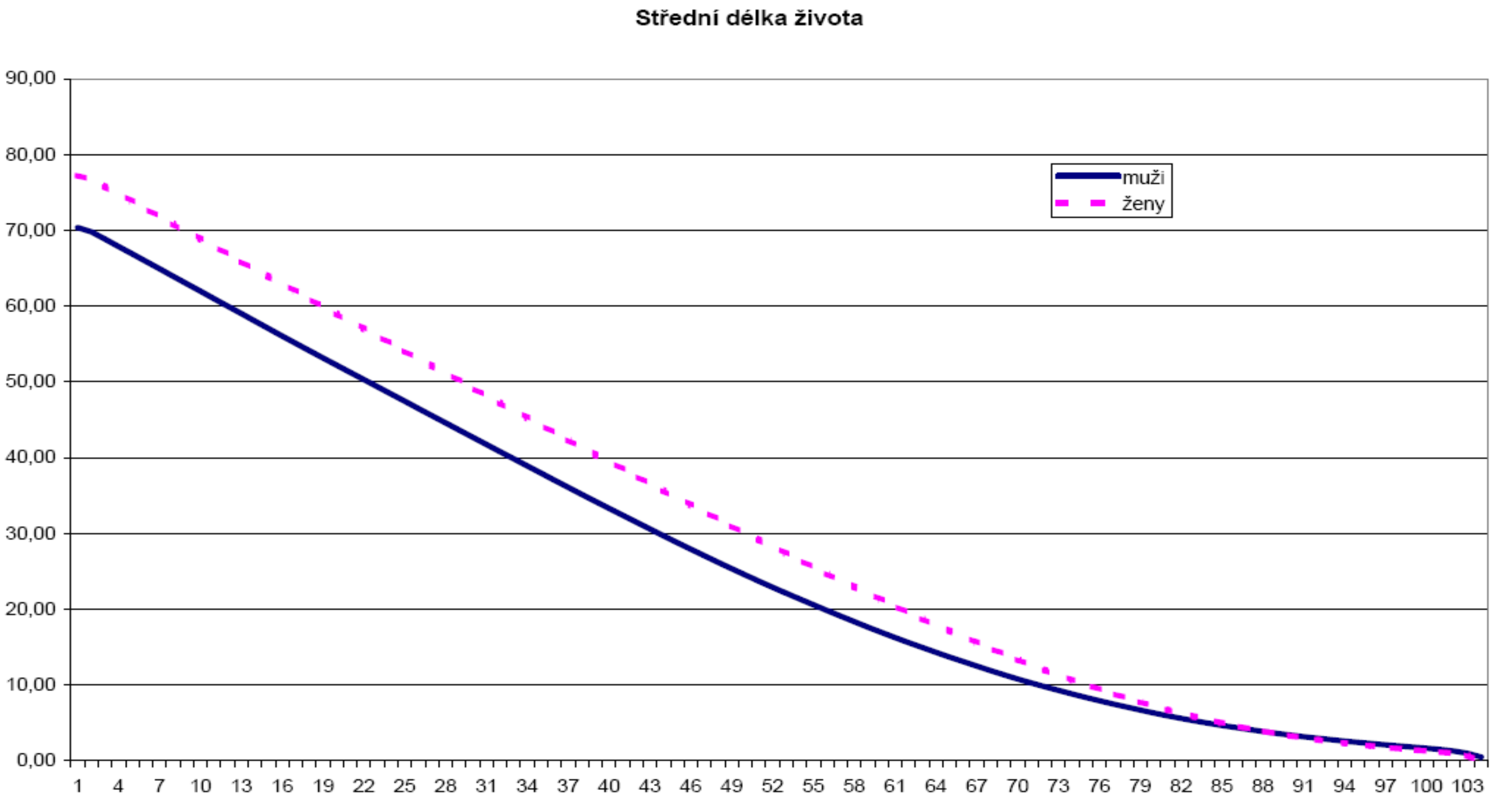
zdroj: český statistický úřad

Pravděpodobnosti úmrtí



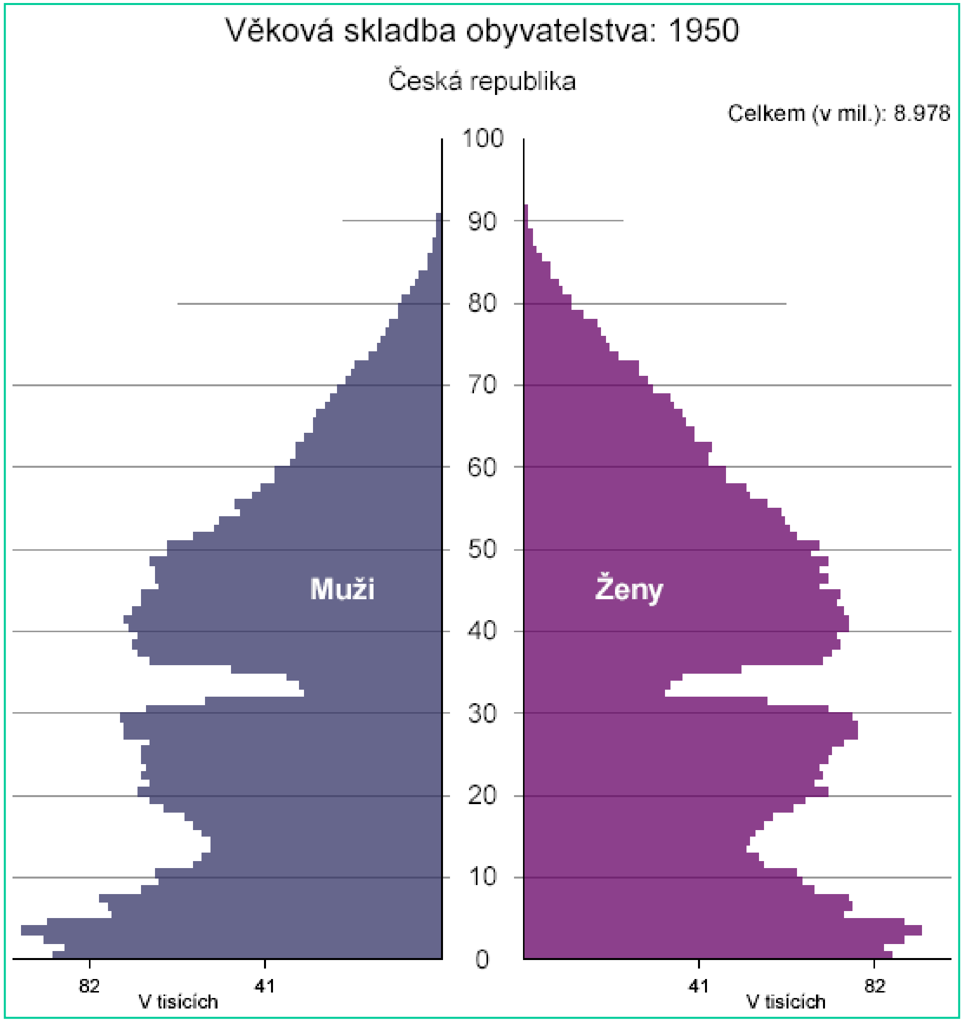
zdroj: český statistický úřad

Střední délka života



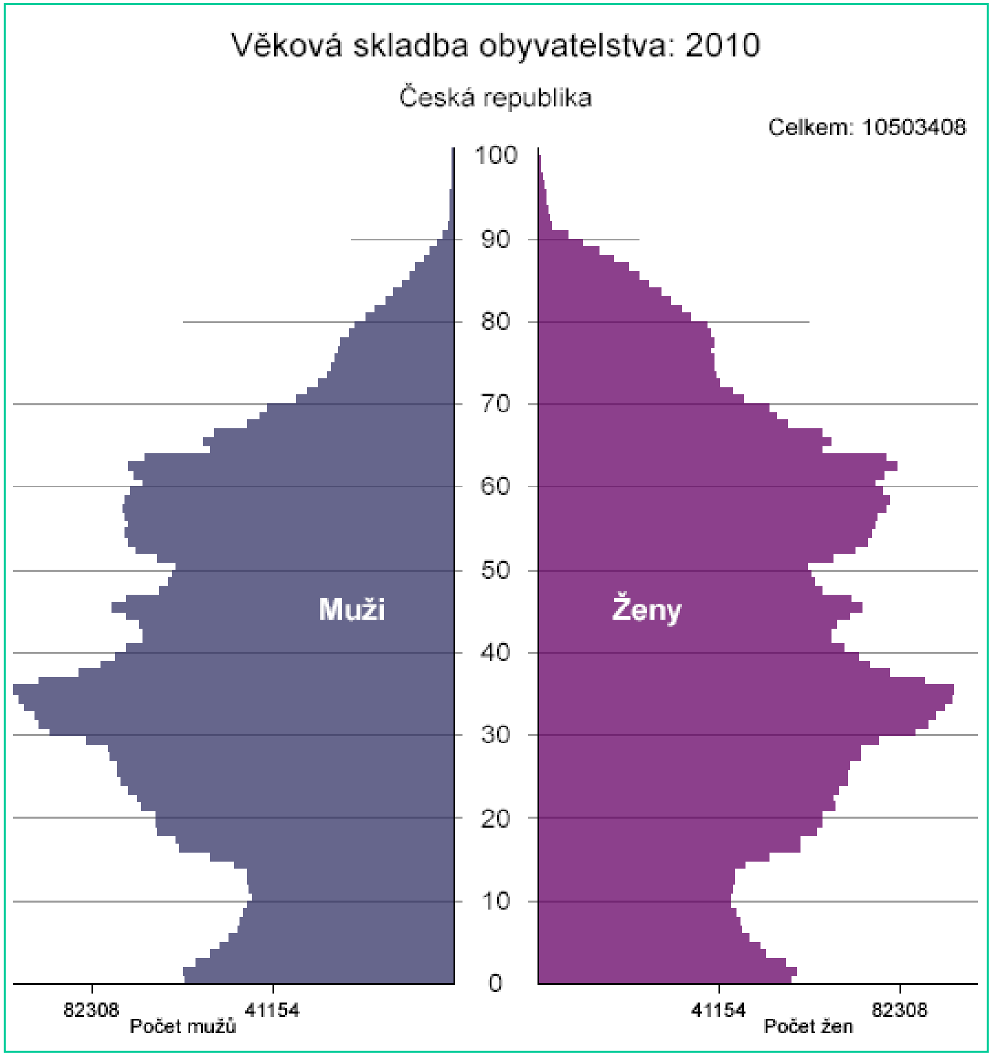
zdroj: český statistický úřad

Věková skladba obyvatelstva v roce 1960



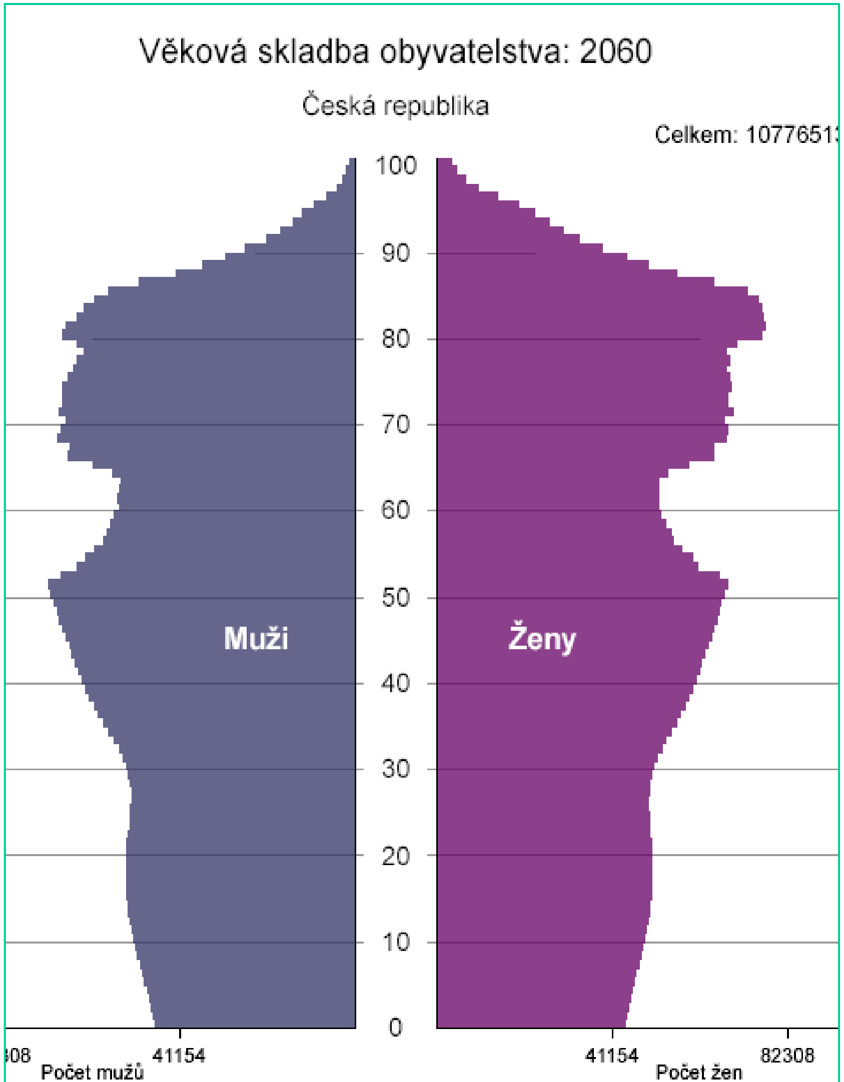
zdroj: český statistický úřad

Věková skladba obyvatelstva v roce 2010



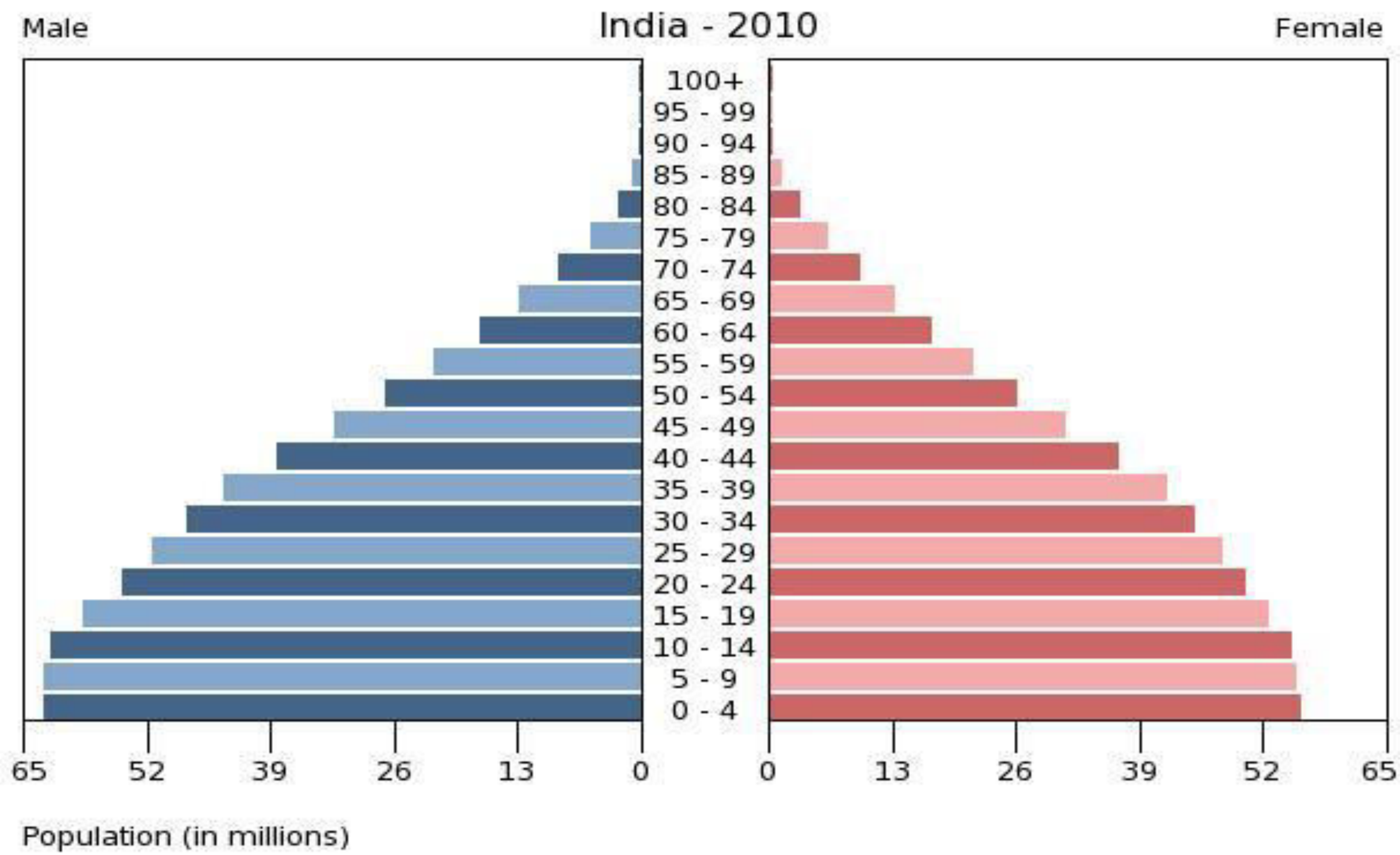
zdroj: český statistický úřad

Věková skladba obyvatelstva v roce 2060



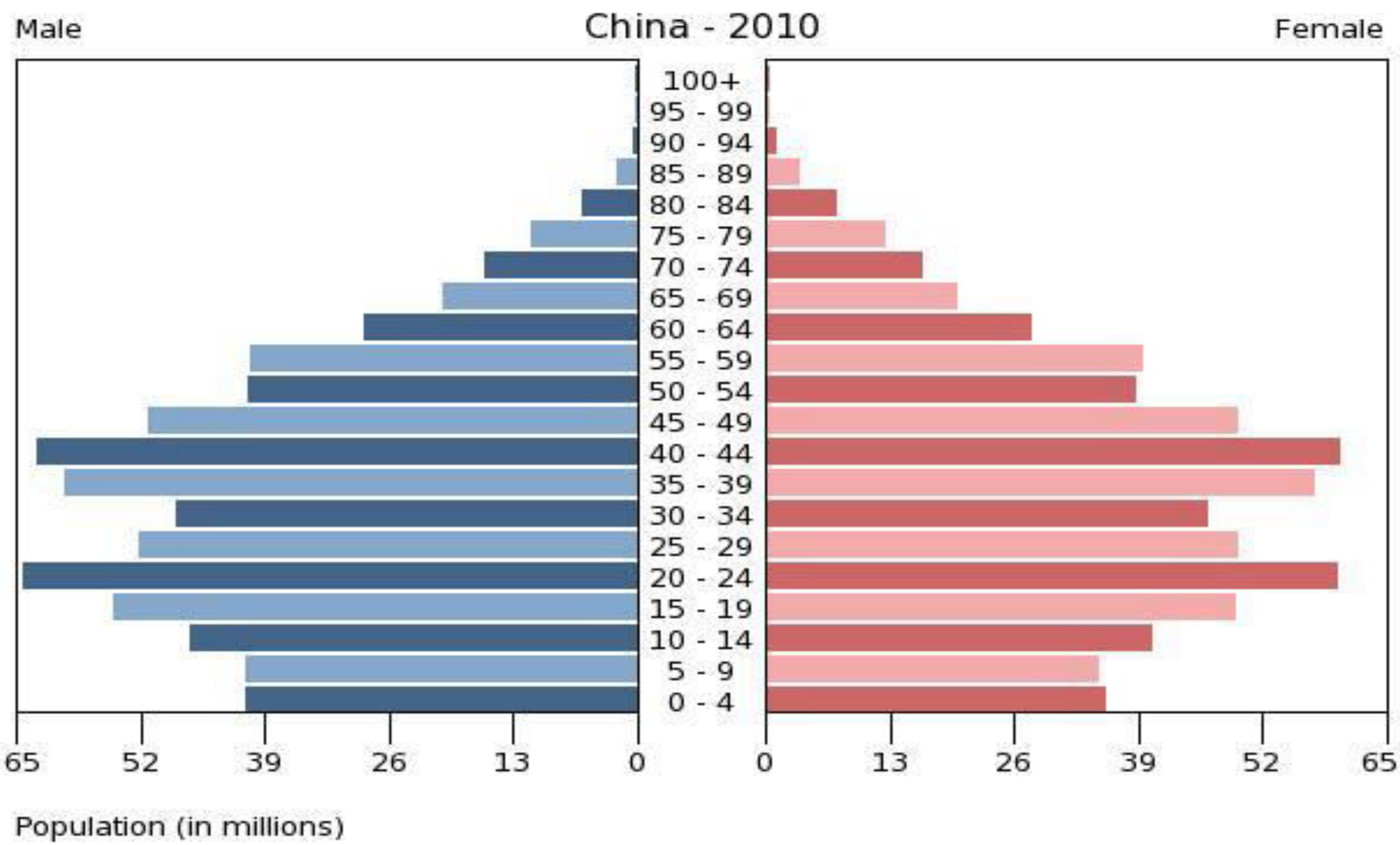
zdroj: český statistický úřad

Věkové pyramidy ve světě



zdroj: https://www.census.gov/population/international/

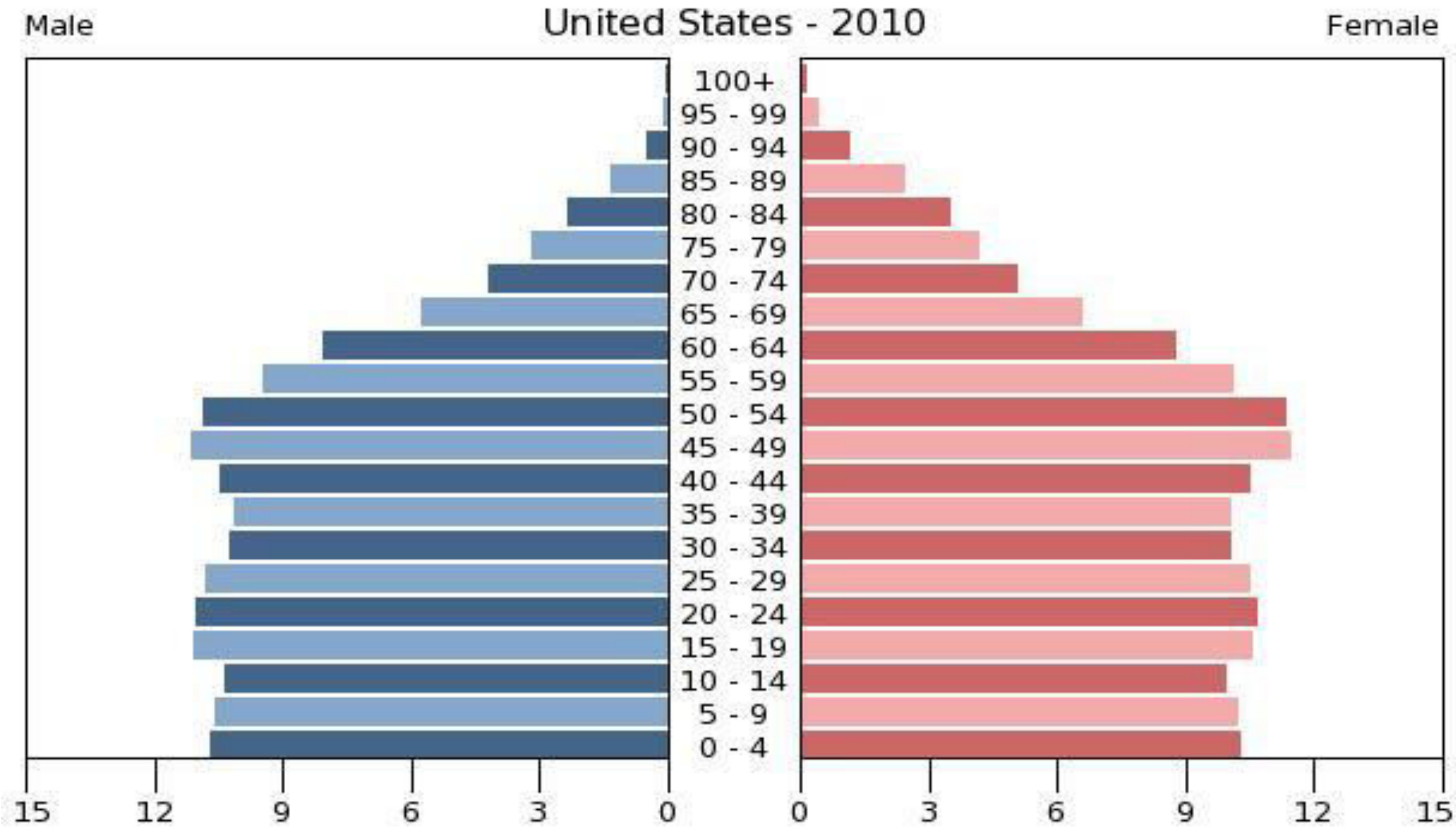
Věkové pyramidy ve světě



.1

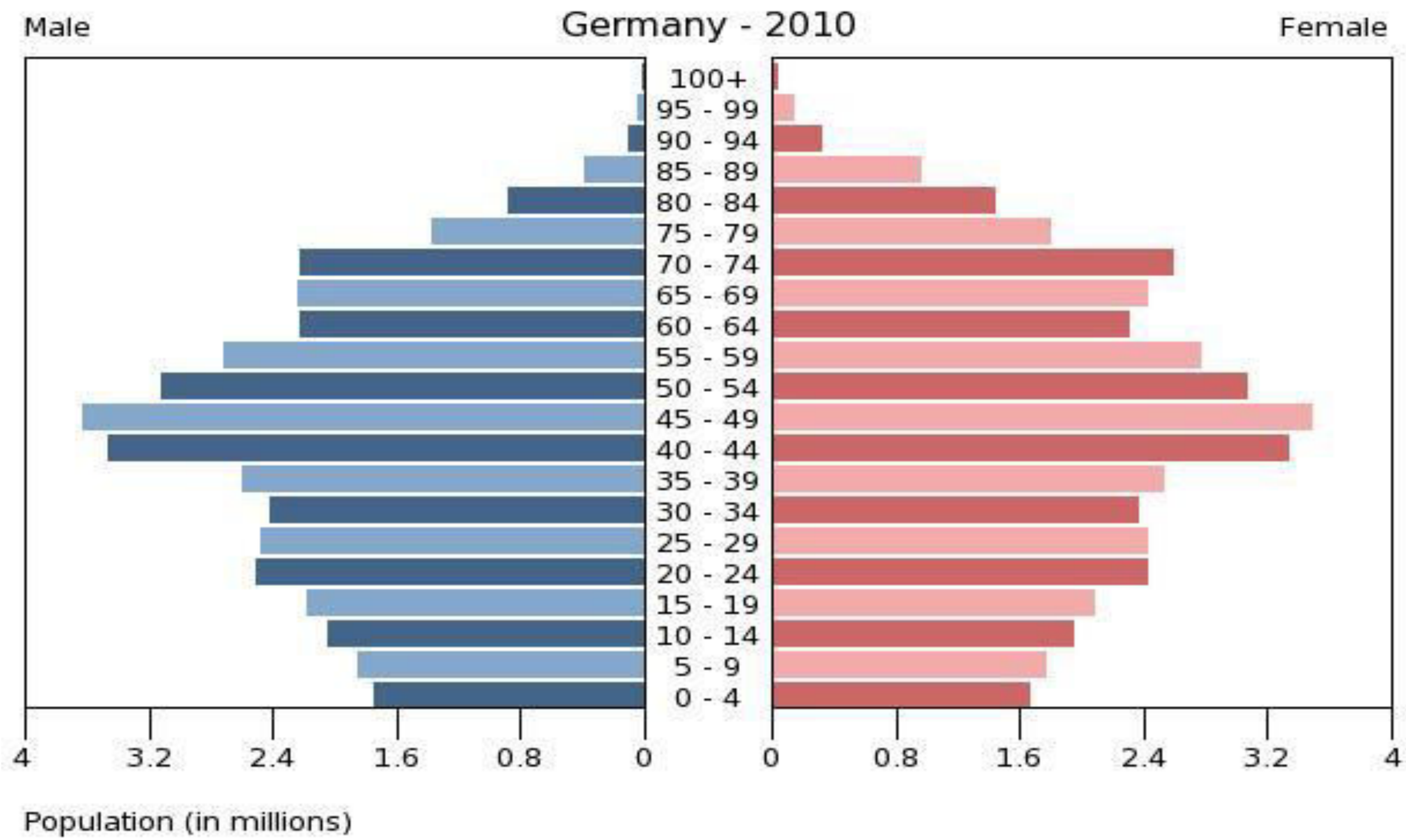
zdroj: https://www.census.gov/population/international/

Věkové pyramidy ve světě



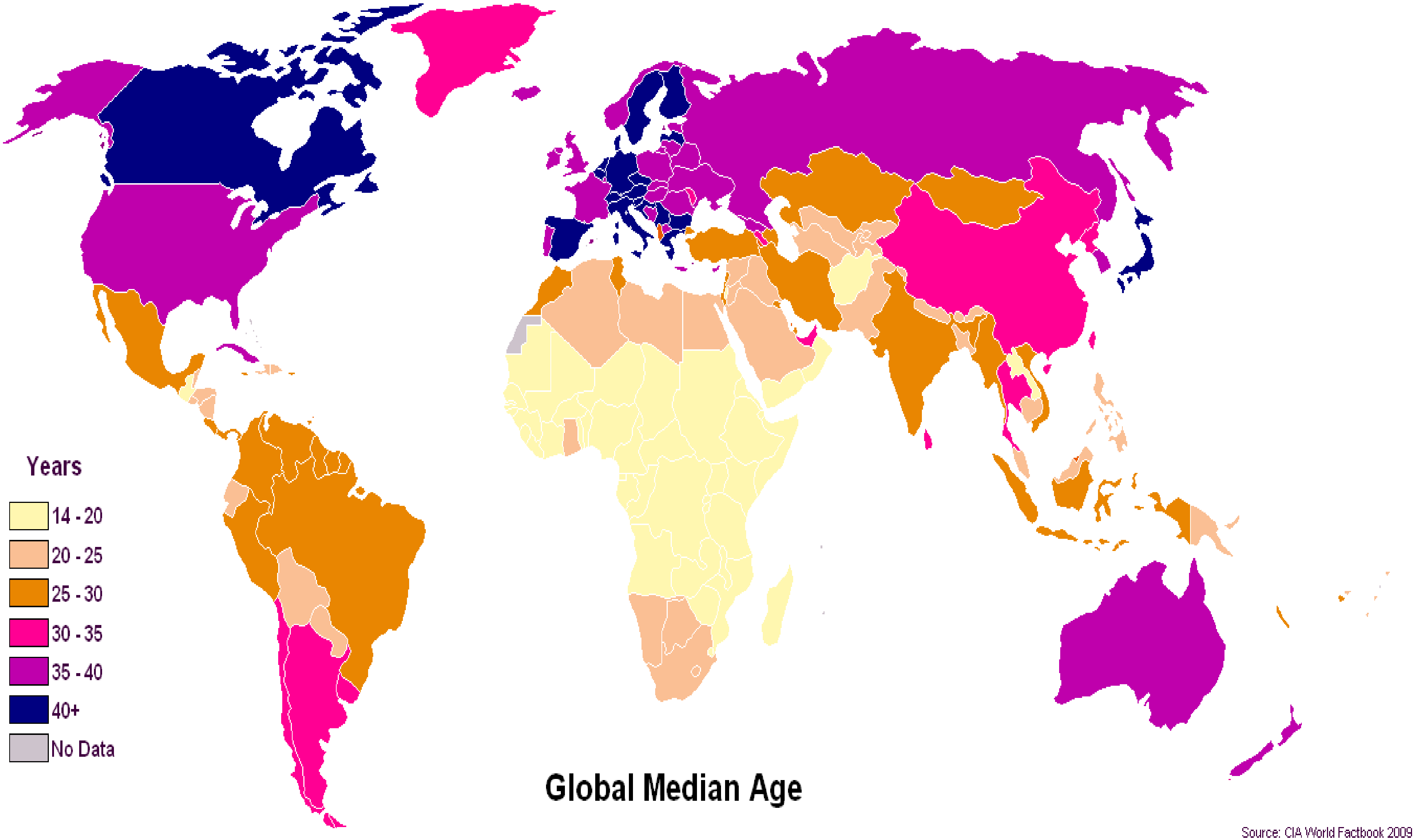
zdroj: https://www.census.gov/population/international/

Věkové pyramidy ve světě



zdroj: https://www.census.gov/population/international/

Věkový medián ve světě



Stárnutí populace (nejen v ČR)

- proces změn v jeho relativní věkové struktuře, při kterém roste podíl starého obyvatelstva v populaci

- druhy:
  - **absolutní** = pokles úmrtnosti – vede k růstu počtu těch, kteří se dožívají vyššího věku = stárnutí ve vrcholu pyramidy
  - **relativní** = pokles porodnosti – úbytek nejmladších = stárnutí v základně pyramidy

  - oba druhy působí většinou současně

Faktory a důsledky stárnutí populace

Faktory stárnutí populace:

- zlepšování zdravotního stavu seniorů
- pokles plodnosti
- převaha osob v důchodovém věku
- nárůst podílu lidí ve věku nad 70 let, resp. 80 let

Důsledky stárnutí populace:

- snižující se podíl produktivní populace
- zvyšování nákladů na sociální a zdravotní péči
- méně příspěvků do důchodového systému než výplat důchodů
- sociální péče – zužování souboru možných pečovatelů

Komutační čísla

- Komutační čísla nultého řádu

$$D_x = l_x . v^x$$

  – diskontovaný počet dožívajících se věku x

$$C_x = d_x . v^{x+1}$$

  – diskontovaný počet zemřelých ve věku x

zdroj: autor

Komutační čísla

- Komutační čísla prvního řádu

$$N_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega$$

$$M_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j} = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega$$

zdroj: autor

Komutační čísla

- Komutační čísla druhého řádu

$$S = \sum_{j=0}^{\omega - x} N_{x+j} = N_x + N_{x+1} + \ldots + N_\omega$$

$$R_x = \sum_{j=0}^{\omega - x} M_{x+j} = M_x + M_{x+1} + \ldots + M_\omega$$

zdroj: autor

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že 20letá osoba zemře před dosažením věku 21 let?? (q20)

Řešení:

$$q_{20} = \frac{l_{20} - l_{21}}{l_{20}} = \frac{99\,587 - 99\,563}{99\,587} = 0{,}000\ 237$$

zdroj: autor

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že se osoba právě 18letá dožije věku 19 let?? (p_{18})

Řešení:

$$p_{18} = \frac{l_{19}}{l_{18}} = \frac{99\,610}{99\,633} = 0{,}999\ 773\,,$$

zdroj: autor

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že 18letá osoba bude žít ještě nejméně 5 let?? (5p18)

Řešení:

$$ {}_5p_{18} = \frac{l_{23}}{l_{18}} = \frac{99\,515}{99\,633} = 0{,}998\ \ 812\,, $$

zdroj: autor

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že 20letá osoba zemře před dosažením 25 let?? ($_5q_{20}$)

Řešení:

$$_5q_{20} = \frac{l_{20} - l_{25}}{l_{20}} = \frac{99\,587 - 99\,465}{99\,587} = 0{,}001\,220$$

zdroj: autor

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že 20letá osoba zemře ve svých 25 letech??

Řešení:

$$_{5|}q_{20} = \frac{l_{25} - l_{26}}{l_{20}} = \frac{99\,465 - 99\,442}{99\,587} = 0{,}000\ 237$$

zdroj: autor

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že 20letá osoba zemře poté, co dosáhla 25 let, ale před dosažením 35 let?? ($_{5|10}q_{20}$)

Řešení:

$$_{5|10}q_{20} = \frac{l_{25} - l_{35}}{l_{20}} = \frac{99\,465 - 99\,142}{99\,587} = 0{,}003\,245\,,$$

zdroj: autor

Příklad

Uvažujme 40letou matku a jejího 15letého syna. Určíme pravděpodobnost, že za 20 let

a)budou oba naživu;

b) bude žít pouze syn;

c) bude žít pouze matka;

d) budou oba po smrti.

a) $_{20}p'_{40} \cdot {}_{20}p_{15}$

b) $_{20}q'_{40} \cdot {}_{20}p_{15}$;

c) $_{20}p'_{40} \cdot {}_{20}q_{15}$

d) $_{20}q'_{40} \cdot {}_{20}q_{15}$;

zdroj: autor