WWW.VSE.CZ

Pojistná matematika
1BP305

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontakt

Radová

E-mail: radova@vse.cz

Místnost 180 NB

Konzultace

- Po 18 - 19
- Výjimky – viz ISIS

Literatura

- Tomáš Cipra: Pojistná matematika – teorie a praxe
- Otakar Macháček: Základy finanční a pojistné matematiky

Klasifikační stupnice

Známka	počet bodů
1	90-100
2	75-89
3	60-74
4+	50-59
4	méně než 50

zdroj: autor

Pojištění

- Dříve
  - Úmrtí - pozůstalí se podíleli
  - Zničení majetku – příspěvek hmotný, prací
- Nyní
  - Kompenzace – peněžní forma
  - Zaniklé naturální vazby - rezervy - výběr předem
  - Míra rizika odhadována na základě zkušeností z minulých let
  - Velký počet malých příspěvků pokryje velké škody (vypočítává se pomocí pravděpodobnosti – zabývá se hromadnými jevy – distribuční fce)

Pojištění

- eliminace důsledků nahodilostí,
- k odstranění rizika → spíše finanční zmírnění škody,
- pomáhá řešit situaci s nejistými důsledky (= nahodilost), hrozí nebezpečí, ale není přesně určené, většina lidí má svojí individuální funkci užitku
- Nahodilosti
  - absolutní – požár, povodeň, krupobití,…
  - relativní – úmrtí (určitě nastane, jen nevíme kdy)

Pojištění

- Jedna z klíčových oblastí hospodářství
- Úkoly
  - Pojistná ochrana občana či jiného subjektu
  - Bezporuchový chod ekonomiky státu
  - Konkurent a partner bankovního sektoru
- 2 složky
  - etická – báze solidarity
  - výdělečná – podnikání, prosperující odvětví – zejména ŽP

Opakování finanční matematiky

- Základem je časová hodnota peněz
- Peněžní toky a stavy nelze srovnávat resp. provádět s nimi početní operace, pokud se nacházejí v různých časových okamžicích
- Nutné převést na společný časový okamžik – úročením (do budoucnosti) nebo odúročením (do minulosti)
- Úročení (složené) $CF*(1+i)^n$ i = úroková míra
- Odúročení (složené) $\dfrac{CF}{(1+i)^n}$ n = čas CF= pen. tok /stav

zdroj: autor

Opakování finanční matematiky

- Úročení (jednoduché) $CF * (1 + ni)$
- Odúročení (jednoduché) $\dfrac{CF}{(1 + ni)}$

- Úrokové období = jak často se připisují úroky (měsíčně, čtvrtletně, ročně…)
- Sazba *i* ve vzorcích je vždy příslušná k úrokovému období (čtvrtletní, pololetní…)
- Roční sazbu (i jinou) v p.a. (i jiném intervalu) převádíme pomocí konvence sazba k období= sazba zadaná/m, kde m je počet úrokovacích období v intervalu, pro který platí sazba zadaná
- Př. Připisování čtvrtletní a zadaná sazba v p.a. = roční, potom *i = i v p.a./4 (m= počet úrokovacích období v 1 roce = 4)*

zdroj: autor

Spoření

- pravidelné ukládání určitých částek
- pro naše účely pravidelné úložky ve stejné výši (konstantní anuity)
- určujeme zpravidla budoucí hodnotu

Krátkodobé spoření

- v rámci 1 úrokového období
- úroky přičteny na konci
- jednoduché úročení
- úroky tvoří aritmetickou posloupnost
- ukládáme-li částku počátkem dílčího období (měsíce apod.), jedná se o předlhůtní spoření
- ukládáme-li částku koncem dílčího období, jedná se o spoření polhůtní

m…počet dílčích období (vkladů), A…výše vkladu

i…úroková míra, U = součet úroků za období

Předlhůtní:

$$U = \frac{Ai}{m}(m + m - 1 + m - 2 + \cdots + 1) = \frac{Ai}{m}\frac{m(m+1)}{2}$$

Celkem pak je budoucí hodnota

$$FV = Am + U = Am\left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right)$$

Polhůtní:

$$U = \frac{Ai}{m}(m - 1 + m - 2 + \cdots + 1 + 0) = \frac{Ai}{m}\frac{m(m-1)}{2}$$

$$FV = Am + U = Am\left(1 + \frac{m-1}{2m}i\right)$$

zdroj: autor

Dlouhodobé spoření

- každé úrokové období je vložena jedna úložka
- více úrokových období (n)

Předlhůtní:

$$FV = A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + \dots + A(1+i)^1 = A(1+i)[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1]$$
$$= A(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = A(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Polhůtní:

$$FV = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \dots + 1 = A[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1] = A\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$
$$= A\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

zdroj: autor

Kombinované spoření

- dlouhodobé polhůtní spoření, kdy je ukládáno více úložek pravidelně v rámci jednoho úrokového období
- celková úložka v rámci jednoho období se vyčíslí pomocí krátkodobého spoření
- jinak řečeno se peněžní toky v rámci 1 období převedou ke konci tohoto období a s výslednou částkou se počítá jako s úložkou dlouhodobého polhůtního spoření

- Předlhůtní

$$FV = Am\left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- Polhůtní

$$FV = Am\left(1 + \frac{m-1}{2m}i\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

zdroj: autor

Příklad 1

Doteď jsme spořili počátkem každého čtvrtletí 2 500 Kč při 6% p.a. a pololetním připisování úroků. Na stejném účtu chceme spořit i nadále, ovšem chceme ukládat peníze koncem každého měsíce. Kolik musí činit výše měsíční úložky, aby se celková naspořená částka ani doba spoření nezměnila?

Řešení

Pro obecné n musí dle zadání platit:

$$Am_1\left(1+\frac{m_1+1}{2m_1}i\right)\frac{(1+i)^n-1}{i}=Xm_2\left(1+\frac{m_2-1}{2m_2}i\right)\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$2500\,.\,2\,.\left(1+\frac{3}{4}\,.\,0{,}03\right)\frac{1{,}03^n-1}{0{,}03}=X\,.\,6\,.\left(1+\frac{5}{12}\,.\,0{,}03\right)\frac{1{,}03^n-1}{0{,}03}$$

Z toho pak

$$X=841{,}56\ K\check{c}$$

zdroj: autor

Příklad 2

Jak dlouho musí klient spořit koncem každého čtvrtletí částku 18 000 Kč, aby naspořil částku 700 000 Kč při úrokové sazbě 4,83 % p.a. a čtvrtletním připisování úroků? Úroky jsou zdaněny srážkovou daní ve výši 15%.

Řešení

Ze zadání platí

$$18000\,.\,\frac{\left(1+\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85\right)^{4n}-1}{\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85}=700\,000$$

Po úpravě

$$\left(1+\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85\right)^{4n}=\frac{700\,000\,.\,\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85}{18000}+1$$

Rovnici logaritmujeme a po úpravě máme

$$n=\frac{log\left(\frac{700\,000\,.\,\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85}{18000}+1\right)}{4log\left(\left(1+\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85\right)\right)}=8{,}22\ let$$

zdroj: autor

Příklad 3

Spoříme 10 let vždy koncem měsíce 1 500 Kč při 5 % p.a. a pololetním připisování úroků. Jaká bude naspořená částka, když banka strhává na konci každého roku poplatek ve výši 560 Kč a úroky jsou zdaněny srážkou u zdroje ve výši 15%?

Řešení

Zjistíme naspořenou částku bez poplatku (S). Odečteme pak souhrn hodnot poplatků aktualizovaných pomocí spoření (P) (poplatek roční třeba převést na pololetní!)

$$S = 1500\,.\,6\,.\left(1+\frac{5}{12}\,.\frac{0{,}05}{2}\,.\,0{,}85\right)\frac{\left(1+\frac{0{,}05}{2}\,.\,0{,}85\right)^{20}-1}{\frac{0{,}05}{2}\,.\,0{,}85} = 223379{,}46\ Kč$$

$$P = \frac{560\,.\,\frac{0{,}05}{2}\,.\,0{,}85}{\left(1+\frac{0{,}05}{2}\,.\,0{,}85\right)^{2}-1}\,.\,\frac{\left(1+\frac{0{,}05}{2}\,.\,0{,}85\right)^{20}-1}{\frac{0{,}05}{2}\,.\,0{,}85} = 6816{,}17\ Kč$$

zdroj: autor

$$S - P = 216563{,}29 Kč$$

Příklad 4

- Klient uzavřel životní pojištění na 20 let. Spořící složka je 2000 Kč vkládaných počátkem měsíce. Garantované zhodnocení je ve výši 3,5 % p.a. s pololetním připisováním. Jaká je hodnota odkupného (stav účtu) na konci 12. roku, účtuje-li si pojišťovna na konci roku 400 Kč za správu smlouvy a vstupní poplatek zaplacený z prvních vkladů je 5 % z celkových plánovaných vkladů (tj. za 20 let, bez úroků, nepočítají se splátky, kterými je hrazen poplatek)?

Teorie

- důchod – pravidelně vyplácené částky (anuity)
- budeme určovat převážně současnou hodnotu těchto plateb
- tj. kolik potřebuji dnes, abych mohl dostávat X Kč měsíčně po n let apod.
- vztah mezi důchodem a spořením
- S… budoucí hodnota anuit (spoření),D….současná hodnota anuit (důchod)

zdroj: autor

$$D = \frac{S}{(1+i)^n}$$

Členění důchodů

- dočasný – pobíraný po určitou konečnou dobu
- věčný - pobíraný po nekonečnou dobu
- předlhůtní – platba začátkem období
- polhůtní - platba koncem období
- bezprostřední – výplaty počínají ihned
- odložený – prostředky jsou po určitou dobu úročeny, potom začínají výplaty

Důchody

- **jisté** – mzda, starobní důchod,…
- **případné** (nejisté) – dividenda, ŽP,…

- **předlhůtní** – na počátku období
- **polhůtní** – na konci období

- **dočasné** (omezené)
- **věčné** (neomezené, perpetuita) (∞)

Důchod předlhůtní věčný

$$1+v+v^2+v^3+\ldots \to \sum \to s=\frac{1}{1-q}$$

$$\ddot{a}_{\infty}=1+\frac{1}{i}=\frac{(1+i)}{i}=\frac{1}{d}$$

$$d=\frac{i}{(1+i)}=i\cdot\frac{1}{(1+i)}=i\cdot v$$

zdroj: autor

Důchod polhůtní věčný

$$a_{\infty} = PV = v + v^2 + \ldots = \frac{v}{(1-v)} = \frac{1}{i}$$

zdroj: autor

Důchod dočasný

- Předlhůtní důchod dočasný

$$\ddot{a}_n = (1+i)\cdot\frac{1-v^n}{i} = \frac{1-v^n}{d}$$

- Polhůtní důchod dočasný

$$a_n = \frac{1-v^n}{i}$$

zdroj: autor

Důchod věčný

$n \to \infty$

- pro

$$D = Am\left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right)\frac{1}{i}$$

předlhůtní

$$D = Am\left(1 + \frac{m-1}{2m}i\right)\frac{1}{i}$$

polhůtní

zdroj: autor

Příklad 1

Jaká je výše uložené částky na termínovaný vklad, úročený 3,2% p.a., roční připisování úroků, jestliže chceme na konci každého roku po dobu 12 let pobírat důchod 60000 EUR a na konci každého měsíce si banka účtuje poplatek 21 EUR.

Řešení

Dle zadání platí

$$D = A\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + Pm\left(1+\frac{m-1}{2m}i\right)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$D = 60000 * \frac{1-(1+0{,}032)^{-12}}{0{,}032} + 21 * 12 * \left(1+\frac{12-1}{24} * 0{,}032\right)\frac{1-(1+0{,}032)^{-12}}{0{,}032}$$
$$= 592687{,}34\ EUR$$

zdroj: autor

Příklad 2

Klient v rámci životního pojištění spořil čtvrtletně polhůtně 4 000 Kč po dobu 30 let. Přesně v půlce doby spoření obdržel bonus ve výši 1,5% naspořené částky. Na konci doby spoření obdržel další bonus ve výši 2% z celkově naspořené částky včetně 1. bonusu. Určete výši věčné renty vyplacené koncem každého měsíce, kterou si takto zajistil při i = 3,6% p.a. a čtvrtletním úročení.

Řešení

Určíme výši naspořených prostředků

$$D = 1{,}02 * \left\{4000 * \frac{(1+0{,}009)^{60}-1}{0{,}009} * 1{,}015 * (1+0{,}009)^{60} + 4000 * \frac{(1+0{,}009)^{60}-1}{0{,}009}\right\}$$
$$= 883441{,}19\ Kč$$

Z toho pak výše věčné renty

$$X * 3 * \left(1 + \frac{2}{6} * 0{,}009\right) = D * i$$

$$X = \frac{D * 0{,}009}{3 * \left(1 + \frac{2}{6} * 0{,}009\right)} = 2642{,}40\ Kč$$

zdroj: autor

Příklad 3

Pan Novák si ve 30 letech založil penzijní připojištění a měsíčně polhůtně na něj po dobu 35 let ukládal 1.500 korun. K tomu navíc dostával ročně polhůtně státní příspěvek 150 korun. Určete celkovou naspořenou částku a také výši měsíčního předlhůtního důchodu, který může pan Novák pobírat od svých 65ti do 78ti let. Úroková míra je po celou dobu 3 % p.a. s pololetním připisováním úroků.

Řešení

Určíme výši naspořených prostředků

$$D = 1500 * 6 * \left(1 + \frac{5}{12} * 0{,}015\right) * \frac{(1 + 0{,}015)^{70} - 1}{0{,}015} + 150 * \frac{0{,}015}{(1 + 0{,}015)^{2} - 1} * \frac{(1 + 0{,}015)^{70} - 1}{0{,}015}$$
$$= 1117265{,}70\ Kč$$

Z toho pak výše důchodu

$$D = X * 6 * \left(1 + \frac{7}{12} * 0{,}015\right) * \frac{1 - 1{,}015^{-26}}{0{,}015}$$

$$X = 8626{,}52\ Kč$$

zdroj: autor

Pojištění

- **Stabilizace ekonomické úrovně subjektů** – jednotlivců, podnikatelských subjektů, státu
- Vliv na fungování tržní ekonomiky
- **Makroekonomický význam – investování rezerv**
  - **<u>životní</u>**
    - týká se lidského života (i úrazové pojištění)
  - **<u>majetkové (věcné)</u>**
    - týká se majetku
    - úrazové pojištění -pojistné na bázi věcného poj. (řadí se do ŽP)

Pojištění

- **Životní** – riziko úmrtí a dožití
  - Pojištění pro případ smrti, dočasné pro případ smrti, dožití, více životů, s vrácením pojistného
  - Svatební pojištění
  - Důchodové pojištění
  - Investiční životní pojištění
  - Pojištění TNÚ, DNL, SÚ – doplněk životního
- **Neživotní** – ostatní rizika

Pojištění

- Rozdělení z hlediska tvorby rezerv
  - **Riziková**
    - Nedojde-li k pojistné události během trvání pojištění, nedojde k plnění
    - Počet pojistných událostí není omezen během trvání pojištění
    - Pojistné se spotřebuje na pojistná plnění
  - **Rezervotvorná**
    - Tvoří se rezerva na výplatu sjednaných plnění v budoucnosti, pojistné je vyplaceno vždy

Pojištění

- **Obnosová**
  - Pojistné plnění = pojistná částka
  - Krytí abstraktní potřeb
  - Výše potřeby se nezjišťuje
  - Pojištění osob
- **Škodová**
  - Pojistné plnění závislé na výši škody
  - Pojistné plnění<=škoda
  - Intenzita pojistné ochrany – i=pojistné plnění/škoda
  - Plné pojištění i=100%, podpojištění i<100%

Pojištění-pojmy

- **Pojistný kmen** – souhrn pojistných smluv, které pojišťovna spravuje v rámci určitého druhu pojištění
- **Pojistné riziko**
- **Pojistné podmínky**
  - Všeobecné a zvláštní
- **Pojistná doba**
- **Pojistná smlouva**
- **Pojistník**
- **Pojištěný**
- **Obmyšlený**
- **Pojistitel**
- **Oprávněná osoba**
- **Pojistná částka**

Pojištění

- **Pojistná událost**
  - Kalamita nebo katastrofa, jejíž možnost je pojistnou smlouvou uvažována a jejíž následky má smluvené pojištění do jisté míry hmotně kompenzovat
- **Pojistná smlouva**
  - peněžní částky, které budou pojišťovně hrazeny (pojistné)
  - peněžní částky, které budou pojišťovnou vyplaceny
  - podmínky, za kterých pojišťovna platit bude
  - podmínky, za kterých pojišťovna platit nebude

Pojistné riziko

- Potenciální možnost vzniku pojistné události, při níž pojišťovna podle sjednané smlouvy vyplácí pojistné plnění
- Měřitelné pomocí pravděpodobnosti
- **Záměrné (spekulativní) riziko**
  - Kladné i záporné odchylky od cíle
- **Čisté**
  - Negativní odchylky od cíle
  - Pojistitelné
  - Objektivní – nezávislé na lidech
  - Subjektivní – závislé na činnosti lidí
  - Nelze přesně oddělit

Riziko

- Další dělení
  - Přírodní
  - Vyvolané lidským faktorem
    - Technické
    - Vyvolané člověkem
- Realizace rizika
  - Okamžik (smrt)
  - Období (nemoc)
  - Realizované plně
  - Realizované částečně

Pojistné riziko

- **živelní rizika** = rizika přímých škod na majetku
- **osobní rizika** = rizika předčasné smrti, invalidita, soc. nedostatečnost
- **dopravní rizika** = rizika v souvislosti s dopravním pojištěním
  - **cargo poj.** – týká se přepravovaného nákladu
  - **casco poj.** – týká se vozidla (např. havarijní pojištění)
- **riziko vandalství a odcizení** = plnění <=> překonání bezpeč. opatření
- **šomážní rizika** = riz. přerušení provozu nebo výroby
- **odpovědnostní riz.** = riz. škod způsobená v důsledku jednání pojištěného
- **obchodně-finanční riz.** = vyplývá ze změny ekon. podmínek (nesolventnost odběratele, změna měnového kurzu, úroková a úvěrová rizika…) – zajišťuje EGAP tj. evropská garanční společnost pro krytí úvěrových rizik

Pojistné riziko

- Riziko převzaté od klientů se transformuje na tzv. pojistně technické riziko pojistitele
- Potenciální nebezpečí, že ve skutečnosti nedojde k vyrovnání mezi přijatým pojistným a vyplaceným pojistným plněním
- měří se směrodatnou odchylkou
  - mezi očekávaným stavem, ze kterého vycházel výpočet pojistného
  - skutečným stavem, který je dán vyplaceným pojistným plněním

Příklad

- Předpokládejme, že pojistná událost nastává během jednoho roku s pravděpodobností 1% (0,01),
- Pojistná událost je spojena se škodou 1mil.
- Dojde-li k poj. události => platíme 1mil.
- Nedojde-li k poj. události neplatíme nic

Příklad

- Pojistně technické riziko pojistitele
- Xi = náhodná veličina
  - výše škody v i-té smlouvě
  - pravděpodobnostní rozdělení Xi
    - {1mil s pravděp. 0,01}
    - {0 s pravděp. 0,99}
- Jaká výše škody připadá v průměru na 1 pojistnou smlouvu?
  - => vypočítáme střední hodnotu náhodné veličiny (E) – tj výše škody v průměru na 1 smlouvu

Příklad

zdroj: autor

$$E = \frac{(X_1 + X_2 + \ldots X_n)}{N} = \frac{E(X_1) + E(X_2) + \ldots E(X_n)}{N}$$

$$E(X_i) = 1mil \cdot 0{,}01 + 0 \cdot 0{,}99 = 10tis.$$

- tj. roční pojistné, které bude pojišťovna vybírat
- => když bude mít 100 smluv => bude mít na krytí 1 pojistné události tj. 1mil/10tis. neboli
- **počet smluv, který pokryje výši poj. částky = poj. částka/pojistné**

Příklad

$$\sigma^2(X_i) = \operatorname{var} X_i = rozptyl\ X_i$$

$$\operatorname{var} X_i = E(X_i^2) - E(X_i)^2$$

$$(1mil.^2 \cdot 0{,}01 + 0^2 \cdot 0{,}99) - (10tis.)^2 = 9{,}9 \cdot 10^9$$

$$\sigma\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{N}\right) = \frac{\sqrt{(\operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} X_2 + \ldots + \operatorname{var} X_n)}}{N}$$

zdroj: autor

Příklad (2)

$$\frac{\sqrt{N}\cdot\sqrt{9{,}9\cdot 10^{9}}}{\sqrt{N}\cdot\sqrt{N}}=\frac{99500}{\sqrt{N}}$$

zdroj: autor

- **Pojistně technické riziko pojistitele**
- σ (směrodat. odchylka)
  - tj. P-T riziko pojistitele
  - při N=100 … 9950 ,
  - při N=10tis … 995

Životní pojištění

- Význam
  - pro jednotlivce
  - složka spořící a riziková
    - smrt
    - dožití
  - pro společnost
    - tlumení inflace
    - financování investic
    - doplněk soc. důchodu
    - přínos pro SR

Matematika - Princip ekvivalence

- Matematická naděje
  - náhodná hra
    - součin výhry *v* a pravděpodobnosti *p*

$$s_2 \cdot p_1 = s_1 \cdot p_2 \qquad \frac{s_1}{s_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

  - výhra jednoho – sázka druhého

zdroj: autor

- <u>Pojistná smlouva</u>
  - náhodná hra mezi pojištěncem a pojištěným
  - pojišťovna vyhrává pojistné
  - pojištěný vyhrává pojistné plnění

Princip ekvivalence

- smlouva na 1 rok,
- zaplatíme pojistné P
  - tj. výhra pojišťovny s pravděp. 1,
- pojistná částka K,
  - tj výhra pojištěnce s pravděp P, že nastane pojistný případ (tuto pravděp. pojišťovny odhadují na základě zkušeností z minulých let),
- pojišťovna má N pojistných smluv, a pojistná událost nastává T-krát, pak lze napsat

$$P \cdot 1 = K \cdot \frac{T}{N} \Rightarrow P \cdot N = K \cdot T$$

zdroj: autor

- To, co pojišťovna přijala, vyplatila na odškodném
  - předpokládáme Netto pojistné – praxe brutto
  - Odškodnění menší – pojistná náhrada

Matematika životního pojištění

- Finanční matematika
  - současná hodnota
  - budoucí hodnota
- Matematické modelování úmrtnosti
  - úmrtí
  - dožití se určitého věku

Úmrtnost

- 2 stavy
  - **živý**
  - **zemřelý**
  - jednoznačně rozhodnout
  - přechod jedním směrem
  - úmrtí – náhodné, nezvratné

Pravděpodobnostní nástroje

- Lze vytvořit pravděpodobnostní model úmrtnosti
  - 40letý muž před 50. rokem věku
  - 40letý muž ve věku 50
  - kolik budoucích let bude žít
- Odpovědi na tyto otázky
  - metodika výpočtu v pojištění osob
  - kombinace s finančními výpočty

Model úmrtnosti

- **založen na náhodné veličině T_0 - délka života právě narozeného jedince**
  - měří se v rocích
  - neceločíselné hodnoty
  - spojitá náhodná veličina
- **náhodné veličiny T_x**
  - délka života jedince ve věku x
  - u konkrétního jedince neznáme budoucí délku
  - má odhadnutelné rozdělení
  - využívá se distribuční funkce - zdlouhavé
- uvažujeme pouze celočíselnou délku života

Úmrtnostní tabulky

- prezentace modelu úmrtnosti
- základní nástroj matematiky životního pojištění
- popis vývoje populace vycházející z úmrtnosti obyvatel v jednoletých věkových skupinách
- Východisko pro tvorbu
  - pravděpodobnosti úmrtí q_x

Schéma úmrtnostní tabulky

Věk	Pravděp úmrtí	Pravděp dožití věku x	Počet osob dožívajících se věku x	Počet osob zemřelých ve věku x	Střední počet osob žijících ve věku	Počet zbylých let života	Střední délka života zbývajícího
	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
		$1-q_x$	$l_{x+1} = l_x - d_x$	$q_x * l_x$	$(l_{x+1} + l_x)/2$	$\sum_{j=x} L_i$	T_x / l_x

zdroj: autor

Vztahy v úmrtnostní tabulce

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

$$l_{x+1} = l_x \cdot p_x$$

$$_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1}$$

– pravděpodobnost, že osoba ve věku x bude žít nejméně o n let déle

$$_n q_x = 1 - {}_n p_x$$

– pravděpodobnost, že osoba ve věku x zemře před dosažením věku x+n

$$_{m/n} q_x = {}_m p_x \cdot {}_n q_{x+m} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x}$$

– pravděpodobnost, že osoba ve věku x bude žít dalších m let, ale zemře v průběhu n let následujících po m letech

zdroj: autor

Příklady na pravděpodobnosti

Porovnejte pravděpodobnost, že 20-ti letá osoba bude žít dalších 40 let, s pravděpodobností, že 50-tiletá osoba bude žít dalších 10 let.

$$ {}_{40}p_{20} = \frac{l_{60}}{l_{20}} = 0{,}8814 < {}_{10}p_{50} = \frac{l_{60}}{l_{50}} = 0{,}9235 $$

Jaká je pravděpodobnost, že se matka a dcera dožijí 50 let. Matce je 45 a dceři 20 let

- Podobně jako v předchozím příkladě

$$ {}_{5}p_{45} \cdot {}_{30}p_{20} = \frac{l_{50}}{l_{45}} \cdot \frac{l_{50}}{l_{20}} $$

zdroj: autor

Příklad – dožití dvou osob

Uvažujte sourozence ve věku 30 a 35 let.

- S jakou pravděpodobností budou oba za 30 let naživu?
- Jaká je pravděpodobnost, že za 30 let budou naživu oba, ale za 40 let už jen jeden z nich?

(využijeme pravděpodobnost – současně nastanou dva nezávislé jevy, P=P1.P2)

Řešení

- Předpokládáme, že dožití prvního (P(A)) a dožití druhého (P(B)) jsou vzájemně nezávislé jevy, platí potom

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = {}_{30}p_{30} \cdot {}_{30}p_{35} = \frac{l_{60}}{l_{30}} \cdot \frac{l_{65}}{l_{35}} = 0{,}7281$$

- Jsou možné dva scénáře: A-dožije se první a zemře druhý nebo B-zemře první a dožije se druhý, zřejmě také se jedná o vylučující se jevy neboť nemohou nastat současně, platí (první součin – musí oba přežít 30 let než začneme uvažovat oba scénáře)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = {}_{30}p_{30} \cdot {}_{30}p_{35} \cdot ({}_{10}p_{60} \cdot {}_{10}q_{65} + {}_{10}p_{65} \cdot {}_{10}q_{60}) = 0{,}2658$$

zdroj: autor

Příklad

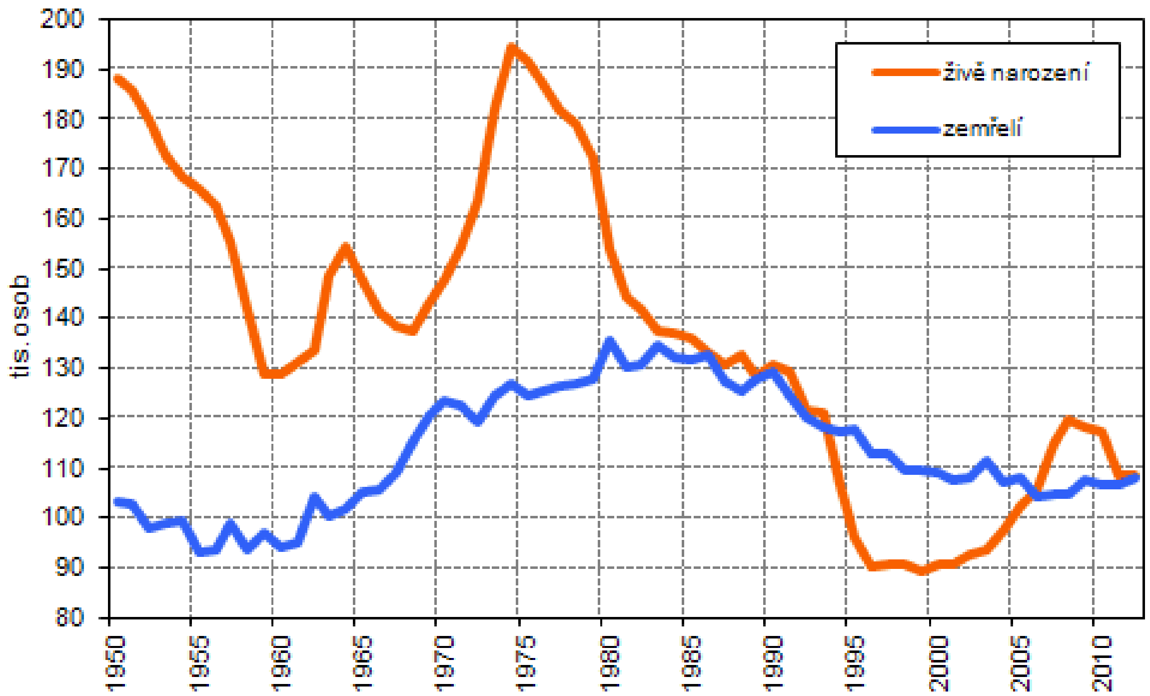
- Jaká je pravděpodobnost, že dvacetiletá osoba zemře během jednoho roku
- Jaká je pravděpodobnost, že 22 letá osoba zemře mezi 55. a 65. narozeninami
- S jakou pravděpodobností bude žít 21 letá osoba ještě 5 let
- S jakou pravděpodobností budou dva muži – synovec 21 let a jeho strýc 65 let-
  - Živi za 20 let
  - Mrtvi za 20 let

Příklad - obecně

- Zhodnoťte co je větší bez úmrtnostních tabulek

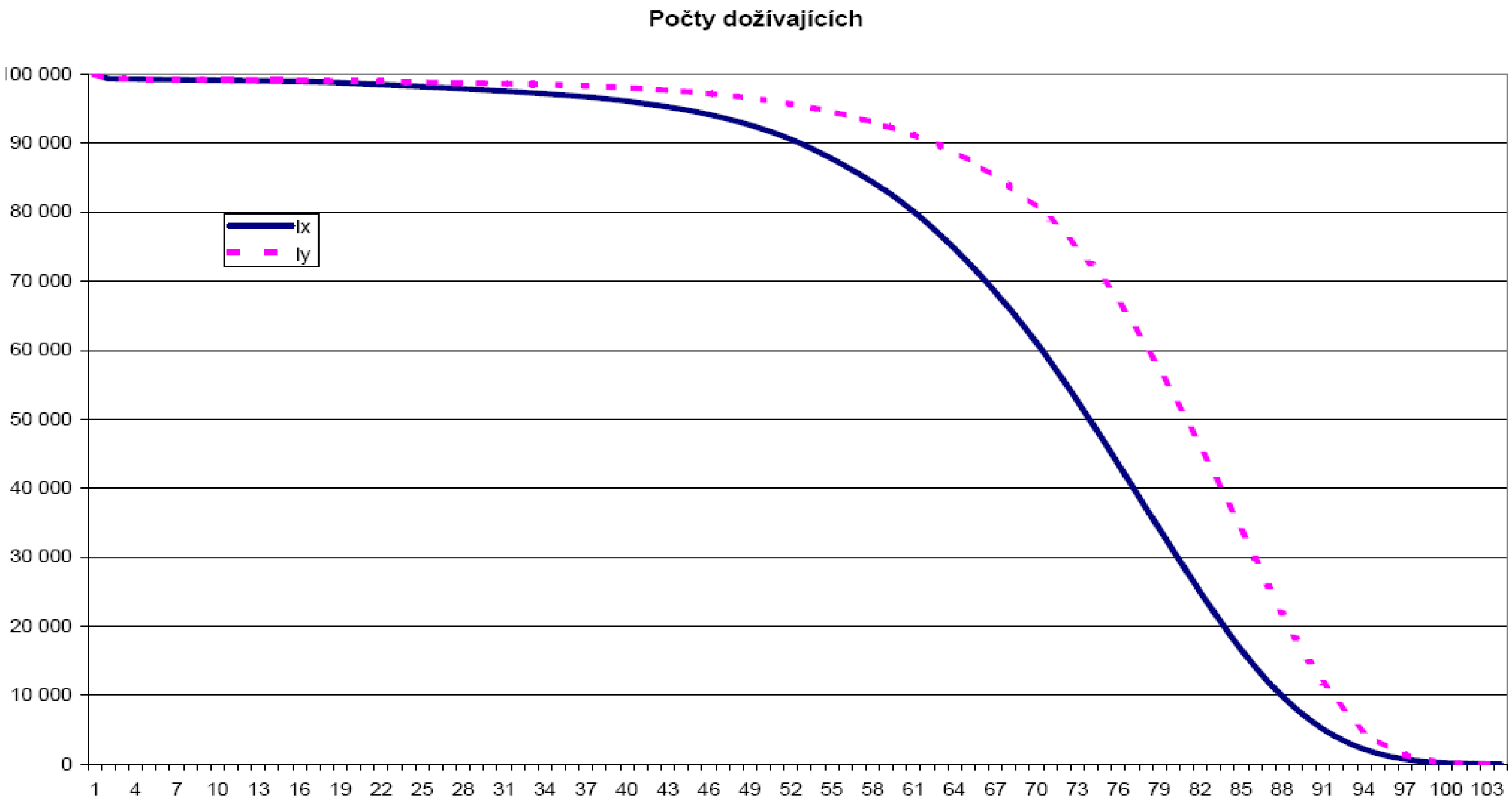
- Pravděpodobnost, že 21 letá osoba bude žít dalších 39 let
- Pravděpodobnost 20 letá osoba bude žít 40 let

Narození a zemřelí v letech 1950-2012



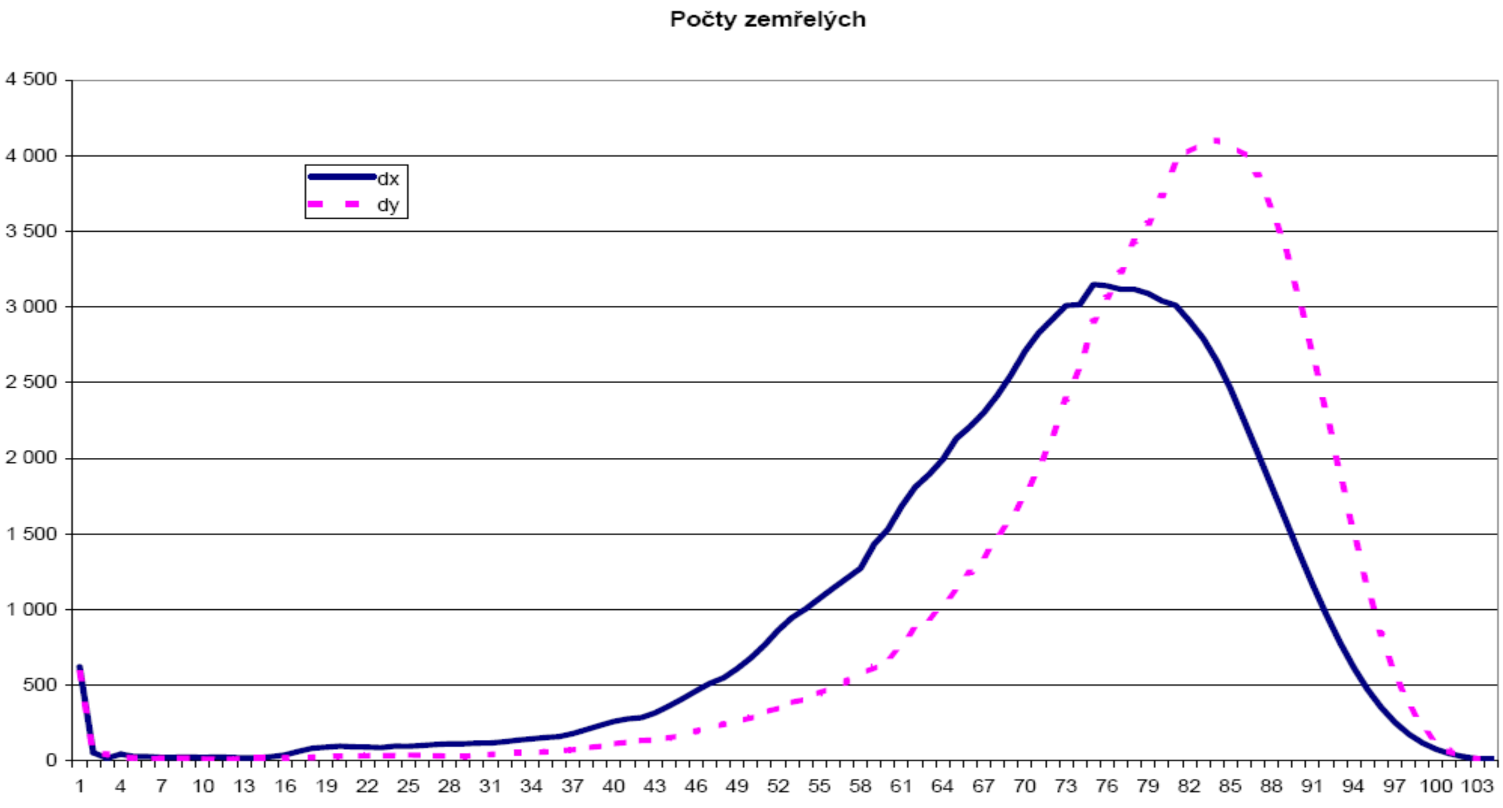
zdroj: český statistický úřad

Počty dožívajících se



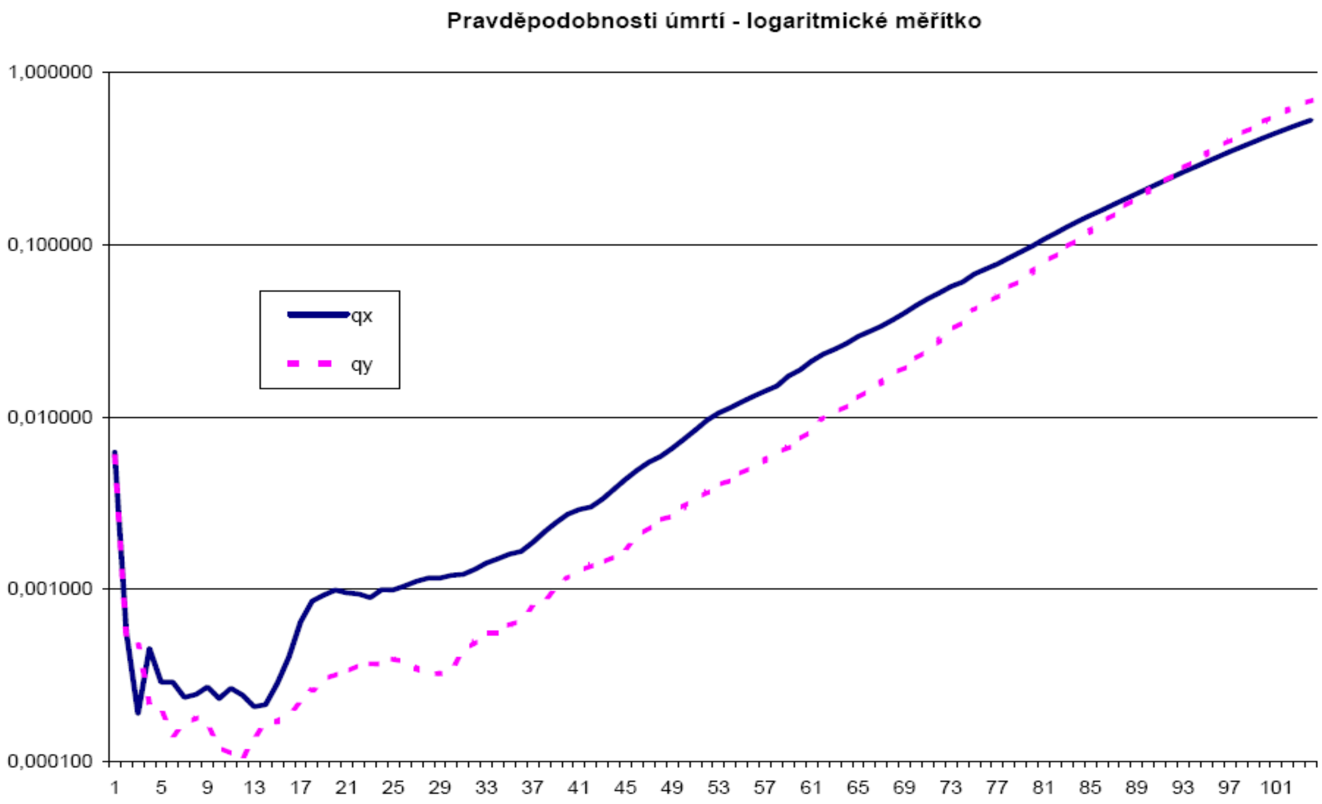
zdroj: český statistický úřad

Počty zemřelých



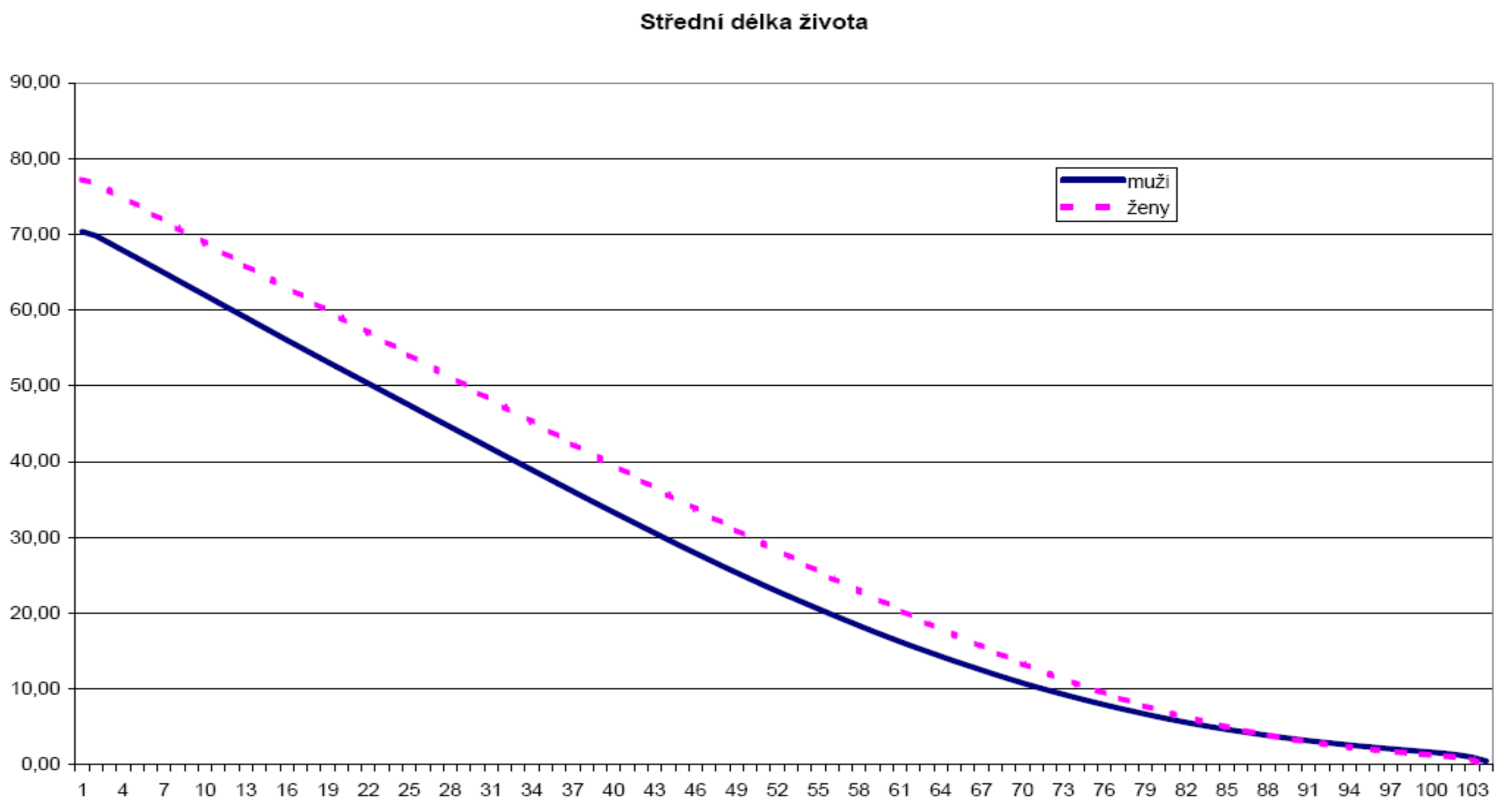
zdroj: český statistický úřad

Pravděpodobnosti úmrtí



zdroj: český statistický úřad

Střední délka života



zdroj: český statistický úřad

Úmrtnostní tabulky

- zlepšování úmrtnostních charakteristik
- úmrtnost ženské a mužské populace
- problematika selekce a antiselekce
- bezpečnostní přirážka pojišťovny
- odhad q_x vlastní
- úprava celonárodních tabulek, vyrovnávání

Pojistné

- Kvantifikace by měla vycházet z velikosti rizika a z nákladů pojistitele
- Velikost pojistného
  - Krytí budoucích nákladů na pojistná plnění
  - Vytvoření příslušné pojistně technické rezervy
  - Krytí provozních a správních nákladů pojistitele
  - Vytvoření přiměřeného zisku
  - Reakce na obecné ekonomické podmínky (inflace, úroková míra)
  - Reakce na pojistném trhu - konkurence

Pojistné

- **Jednorázové**
- **Běžné**

Bruttopojistné

- **Netto pojistné** – životní, neživotní
  - **Jednotné** – oček.poj.plnění/počet smluv
  - **Diferencované** – tarifní třídy (věk, povolání, velikost či kvalita majetku)
  - **Individualizované** – složité, pro akždého zvlášť
- **Správní náklady** – získávací, běžné správní, inkasní, při výplatě důchodů, stornovací, likvidační…
- **Zisk** – jen u neživotních

Ocenění některých druhů životního pojištění

- Teoretické východisko - princip ekvivalence
- Odhad příjmů a výdajů
  - časové rozložení příjmů a výdajů - současná hodnota
  - náhodný charakter finančních toků
- **Pojistně-technická úroková míra**
  - nízká x vysoká

Příklad

- Hodnota dočasného pojištění pro případ smrti, kterou sjedná 40letý muž na dobu 5 let s pojistnou částkou 1000000 Kč

Řešení

- SH částky 1 mil. vyplacené např. na konci 3.roku $\dfrac{1mil.}{(1+i)^3} = 931323$
- Výplata pouze při smrti pojištěného v průběhu 3.roku pojištění
  - pravděpodobnost $_{2/}q_{40} = 0{,}002681$
- Ve třetím roce tedy pojišťovna vyplatí částku 2681 Kč.
- Nyní je nutno za to zaplatit současnou hodnotu 2497 Kč

$$2497 = 1mil \cdot \frac{_{2/}q_{40}}{(1+i)^3} = 1mil \cdot {}_2 q_{40} \cdot v^3$$

zdroj: autor

Řešení

- Současná hodnota uvažovaného pojištění musí zahrnout všechny možné alternativy - úmrtí v prvním až pátém roce

$$1mil \cdot ({}_{0/}q_{40} \cdot v + {}_{1/}q_{40} \cdot v^2 + {}_{2/}q_{40} \cdot v^3 + {}_{3/}q_{40} \cdot v^4 + {}_{4/}q_{40} \cdot v^5) = 12575\ Kč$$

- Možno též

$$1mil \cdot \frac{d_{40} \cdot v + d_{41} \cdot v^2 + d_{42} \cdot v^3 + d_{43} \cdot v^4 + d_{44} \cdot v^5}{l_{40}}$$

zdroj: autor

Řešení

- Komutační čísla nultého řádu

$$D_x = l_x . v^x$$

  – diskontovaný počet dožívajících se věku x

$$C_x = d_x . v^{x+1}$$

  – diskontovaný počet zemřelých ve věku x

$$= 1 mil \cdot \frac{C_{40} + C_{41} + C_{42} + C_{43} + C_{44}}{D_{40}} =$$

zdroj: autor

Řešení

- Komutační čísla prvního řádu

$$N_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega$$

$$M_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j} = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega$$

$$= 1\,mil \cdot \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}} = 12575$$

zdroj: autor

Obecně

- pomocí náhodné veličiny – využívá se pro výpočet rizika (směrod. odchylka)
- **Z** … náhodná veličina
  - $\mathbf{k_x}$ … celočíselná délka života
- Z - definujeme
  - $v^{\mathbf{kx}+1}$ … $\mathbf{k_x} = 0,\dots, n - 1$
  - 0 … $\mathbf{k_x} = n,\dots$

Obecně

kx	Z	pravděpodobnost
0	v	${}_{0/1}q_x$ = ${}_{0/}q_x$
1	v^2	${}_{1/}q_x$ =
…	…	…
n - 1	v^n	${}_{n-1/}q_x$ =
n	0	${}_{n}p_x$ =

zdroj: autor

Obecně - riziko

$$\sigma(Z) = \sqrt{\mathrm{var}(Z)} = \sqrt{E(Z^2) - (E(Z))^2)}$$

kx	Z^2	pravděpodobnost
0	$v^2 = 1/(1+i)^2 = 1/(1+2i+i^2) = 1/(1+r)$	${}_{0/1}q_x$ =
1	v^4	${}_{1/1}q_x$ =
2	v^6	
…	…	…
n - 1	v^{2n}	${}_{n-1/1}q_x$ =

zdroj: autor

Obecně - riziko

$$E(Z) = {}_{0/}q_x \cdot v + {}_{1/}q_x \cdot v^2 + {}_{2/}q_x \cdot v^3 + {}_{3/}q_x \cdot v^4 + {}_{4/}q_x \cdot v^5 + \ldots + {}_{n-1/}q_x \cdot v^n$$

$$E(Z^2) = {}_{0/}q_x \cdot v^2 + {}_{1/}q_x \cdot v^4 + {}_{2/}q_x \cdot v^6 + {}_{3/}q_x \cdot v^8 + {}_{4/}q_x \cdot v^{10} + \ldots + {}_{n-1/}q_x \cdot v^{2n}$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{\mathrm{var}(Z)} = \sqrt{E(Z^2) - (E(Z))^2}$$

- Pro náš případ

$$E(Z) = 0{,}012575$$

$$E(Z^2) = 0{,}011674$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{0{,}011674 - 0{,}012575^2} = 0{,}108779$$

  – Na 1 mil - 108 779 - pro jednu smlouvu
    10 878 - pro 100 smluv
    1 088 - pro 10 000 smluv

zdroj: autor

Kapitálová životní pojištění

- pojištění má formu jednorázové výplaty
- někdy je výplata rozdělena na několik částí

Pojištění pro případ dožití

- pojišťovna vyplatí sjednanou pojistnou částku, jestliže se osoba (x) dožije sjednané doby n
- jednotková počáteční hodnota

$$ {}_nE_x = {}_np_x \cdot v^n $$

- riziko pojištění směrodatná odchylka

zdroj: autor

Příklad

Jaké je jednorázové nettopojistné pro pojištění 50letého muže na dožití věku 60 let na 1000 Kč pojistné částky? 706,99, žena 754,62

Riziko 240,58

Pojištění pro případ smrti

- pojišťovna vyplatí sjednanou částku na konci roku, v němž pojištěná osoba zemřela
- jednotková počáteční hodnota

$$A_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_{j/}q_x \cdot v^{j+1}$$

zdroj: autor

Příklad

Jaké je jednorázové nettopojistné pro pojištění 50letého muže pro případ smrti na 1000 Kč pojistné částky?

560,04 – 304,50

Dočasné pojištění pro případ smrti

- pojišťovna vyplatí sjednanou částku na konci roku, v němž pojištěná osoba zemřela, pokud k úmrtí dojde před uplynutím pojistné doby
- využití jako životní úvěrové pojištění , možno též na klesající částku
- jednotková počáteční hodnota

$$A_{xn}^{1} = \sum {}_{k/}q_x \cdot v^{k+1}$$

zdroj: autor

Odložené pojištění pro případ smrti

- Odkládá povinnost pojišťovny plnit v případě smrti pojištěného o příslušnou karenční dobu k. Pojištěný se tedy musí dožít alespoň věku x+k.
- Nižší pojistné částky
- Lékařská prohlídka se nevyžaduje

$_{k/}A_x =$

$$ {}_{k/}A_x = \sum {}_{k/}q_x \cdot v^{k+1} = \frac{M_{x+k}}{D_x} $$

zdroj: autor

Rozklad pojištění

- Pojištění pro případ smrti
  - Dočasné pojištění pro případ smrti na dobu n
  - Odložené pojištění pro případ smrti s dobou odkladu n

$$A_x = A^1_{xn} + {}_{n/}A_x$$

- Komutační čísla

zdroj: autor

Smíšené pojištění

- pojišťovna vyplatí pojistnou částku na konci pojistného roku, v němž osoba pojištěná ve věku *x* zemře, nejpozději však při dožití sjednané pojistné doby *n*
- kombinace pojištění n a dožití a dočasného pojištění pro případ smrti
- forma spoření s jistotou, že cílové částky bude dosaženo
- jednotková počáteční hodnota

$$A_{xn} = \sum {}_{k/}q_x \cdot v^{k+1} + {}_n p_x \cdot v^n$$

zdroj: autor

Příklad

- Určete jednorázové nettopojistné na 1000 Kč pojistné částky ve smíšeném pojištění pro pojistné doby $n=5,10,...,45$ s omezením $x+n<85$ (x věk při uzavření pojištění).
- Např. $x=50$, $n=10$

Pojištění s pevnou dobou výplaty

- pojišťovna vyplatí sjednanou částku na konci pojistné doby n bez ohledu na to, zda osoba pojištěná ve věku x žije
- toto pojištění se uzavírá za běžné pojistné a v případě smrti pojištěného před uplynutím pojistné doby trvá pojištění dál (pojišťovna jakoby na sebe převezme placení pojistného)
- jednotková počáteční hodnota v^n

Proměnné pojistné plnění

- modifikace předchozích produktů
- pojistné plnění s postupem doby roste nebo klesá
- Dočasné pojištění pro případ smrti s klesající pojistnou částkou

$$(DA)_{xn} = \frac{nC_x + (n-1)C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x}$$

zdroj: autor

Příklad

- Jednorázové nettopojistné na 1mil Kč pojistné částky pro 40letého muže v dočasném pojištění pro případ smrti na dobu 5 let je rovno 12 575 Kč.
- Jaké bude jednorázové nettopojistné, bude-li pojistná částka klesající v jednotlivých letech (1000, 800, ...,200)
- 10 932

Proměnné pojistné plnění

- Dočasné pojištění pro případ smrti s rostoucí pojistnou částkou

$$(IA)_{xn} = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}$$

zdroj: autor

Důchodová pojištění

- Podobně jako pojištění "opakovaného dožití"
- životní důchod
- Soukromé i penzijní pojištění
- Pojišťovna vyplácí na počátku (konci) roku plnění, žije-li oprávněná osoba
- Předlhůtní, polhůtní

Pojištění doživotního důchodu

- pojišťovna vyplácí důchod sjednané výše vždy na počátku pojistného roku, pokud osoba žije
- jednotková počáteční hodnota

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_k p_x v^k = \frac{N_x}{D_x}$$

zdroj: autor

Pojištění doživotního důchodu

kx	Z	pravděpodobnost
0	$\ddot{a}_1$	$_{0/}q_x$
1	$\ddot{a}_2$	$_{1/}q_x$
...	...	...

zdroj: autor

Příklad

- Určete jednorázové nettopojistné na 1000 Kč ročního důchodu v pojištění doživotního důchodu pro věk 50 let.
- 18 756,5 – muž
- 21 627,5 - žena

Pojištění odloženého doživotního důchodu

- první výplata důchodu se odkládá o k let od uzavření pojištění ve věku x
- V případě smrti v době odkladu zaniká bez náhrady nebo vrácení zaplaceného nettopojistného
- jednotková počáteční hodnota pomocí komutačních čísel

$$ {}_{k|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x} $$

zdroj: autor

- Příklad – 50letá osoba na 1000 Kč ročního důchodu odložený k věku 65
- 6838,3 - muž, 9 214 - žena

Pojištění dočasného důchodu

- pojišťovna vyplácí důchod sjednané výše vždy na počátku roku, pokud osoba žije a neuplynula dosud pojistná doba n
- jednotková počáteční hodnota

$$\ddot{a}_{xn} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x v^k = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

zdroj: autor

Příklad

- Jednorázové nettopojistné v pojištění dočasného důchodu pro 50 letou osobu na 15 let

$$\ddot{a}_{50,15} = \frac{N_{50} - N_{65}}{D_{50}}$$

zdroj: autor

- Muž – 11 918
- Žena – 12 413

Kombinace produktů

- Doživotní důchod zaručený na dobu n let, při úmrtí v průběhu prvních n let přechází na dědice

$$_{n/}\ddot{a}_x = \frac{1-v^n}{d} + \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

- Doživotní důchod prodloužený o n let po smrti

$$\ddot{a}_{x\overline{n}} = \ddot{a}_x + A_x \cdot \ddot{a}_n = \frac{N_x}{D_x} + \frac{M_x}{D_x} \cdot \frac{1-v^n}{d}$$

zdroj: autor

Področní důchody

- Mnohem častěji než roční důchody se v praxi vyplácejí področní důchody, kdy je důchod vyplácen m-krát ročně(např. měsíční důchod pro m=12) a uplatní se področní úročení

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{1}{m} \cdot {}_{\frac{k}{m}} p_x v^{\frac{k}{m}}$$

zdroj: autor

Področní důchody

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} {}_{\frac{k}{m}}\ddot{a}_x$$

zdroj: autor

- Jednotková poč. hodnota ročního doživotního důchodu odloženého o k m-tin
- Aproximace

$${}_0\ddot{a}_x = \ddot{a}_x \qquad {}_1\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - 1 \qquad {}_{k/m}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \frac{k}{m}$$

zdroj: autor

Področní důchody

předlhůtní

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} {}_{\frac{k}{m}}\ddot{a}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{m} + \ldots + \frac{m-1}{m}\right) = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

polhůtní

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

zdroj: autor

Příklad – doplnit další možnosti

- Jaké je jednorázové nettopojistné na 1000/12=83,33Kč měsíčního doživotního důchodu pro 50letého muže?

$$a_{50}^{(12)} = a_{50} - \frac{11}{24} = 18{,}76 - \frac{11}{24} = 18{,}29$$

$$\rightarrow 18\,290$$

zdroj: autor

Vztahy mezi produkty

- Rekurentní
  - Pojištění pro případ smrti
  - Dočasné pojištění pro případ smrti
- Hodnoty kapitálového pojištění pomocí důchodového
  - Pojištění pro případ smrti pomocí doživotního důchodu
  - Dočasné pojištění pro případ smrti pomocí dočasného důchodu
- Rozklad trvalého pojištění na dočasné a odložené
  - Pojištění pro případ smrti
  - Pojištění doživotního důchodu

Časové posuny

- Finanční sféra
  - Úročení a diskontování
- Pojišťovnictví
  - Aktuárské úročení a diskontování
    - Pomocí pojištění pro případ dožití
    - Počáteční hodnota odloženého doživotního důchodu

Časové posuny

- Aktuárské diskontování
  - Posun z věku x+n zpět k věku x
  - Pomocí pojištění pro případ dožití

$$ {}_nE_x = {}_np_x \cdot v^n $$

$$ \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

$$ {}_{n/}\ddot{a}_x = {}_nE_x (tj.\ diskont) \cdot \ddot{a}_{x+n} = {}_np_x \cdot v^n \cdot \ddot{a}_{x+n} $$

- Aktuárské úročení – akumulovaná hodnota

$$ \frac{1}{{}_nE_x} = \frac{1}{{}_np_x} \cdot (1+i)^n $$

zdroj: autor

Kalkulace pojistného v životním pojištění

- jednorázové pojistné zaplacené při sjednání smlouvy
- běžné pojistné placené v pravidelných splátkách
  - nepoužívá se u neodloženého důchodu
  - používá se u pojištění s pevnou dobou výplaty
- splátky stejné výše v pravidelných obdobích
- roční nettopojistné ve výši P na pojistnou částku S placené vždy na začátku každ. pojistného roku = důchod vyplácený pojistníkem pojistiteli
  - na principu ekvivalence

Vzorce

- **Pojištění pro případ dožití**

$$ {}_nE_x = P\ddot{a}_{xn} \ldots {}_nP_x = \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{\mathrm{xn}}} = \frac{\frac{D_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

- **Pojištění pro případ smrti**

$$ P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x} \ldots {}_nP_x = \frac{A^1_{xn}}{\ddot{a}_{xn}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

zdroj: autor

Vzorce

- **Smíšené pojištění**

$$ {}_{n}P_{x} = \frac{A_{xn}}{\ddot{a}_{xn}} = \frac{M_{x} - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x} - N_{x+n}} $$

- **Pojištění s pevnou dobou výplaty**

$$ {}_{n}P_{x} = \frac{v^{n}}{\ddot{a}_{xn}} = \frac{v^{n} D_{x}}{N_{x} - N_{x+n}} $$

zdroj: autor

Vzorce

- **Pojištění odloženého doživotního důchodu** (běžné pojistné se platí během odkladu k)

$$_{k}P_{x} = \frac{_{k/}\ddot{a}_{x}}{\ddot{a}_{xk}} = \frac{N_{x+k}}{N_{x} - N_{x+k}}$$

zdroj: autor

Příklad

- Jaké je roční nettopojistné pro smíšené pojištění 40letého muže na dobu 20 let na 1000Kč pojistné částky?

Bruttopojistné

- rozšíření o složky na pokrytí správních nákladů pojistitele a případných nepříznivých škodních výchylek
  - počáteční jednorázové náklady
  - běžné správní náklady
  - inkasní náklady
  - náklady při výplatě důchodu

Bruttopojistné

- Příklad správních nákladů

	Nedůchod pojištění		Důchodová pojištění			
			Z ročního důchodu		Z brutto pojistného	
	Poj č	brutto	jednoráz	běžné	jednoráz	běžné
α	5%		50%	50%		
β	6‰		5‰(2)	6‰(3)		
γ		5%			1%	3%
δ			4%	4%		

zdroj: autor

Brutto pojistné

- Smíšené pojistné
  - Jednorázové

$$\Gamma_x = 1 + \alpha + (\beta_1 - d)\ddot{a}_x$$

  - Běžné

$${}_nB_x = \frac{1}{1-\gamma}\left({}_nP_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{xn}} + \beta\right)$$

zdroj: autor

Brutto pojistné

- Pojistění pro případ smrti a dočasné pojištění pro případ smrti

$$B_x = \frac{A_x + \alpha + \beta \ddot{a}_x}{(1-\gamma)\ddot{a}_x}$$

$$B_{xn} = \frac{A_{xn} + \alpha + \beta \ddot{a}_{xn}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{xn}}$$

zdroj: autor

Brutto pojistné

- Pojištění odloženého doživotního důchodu

$$B_{xk} = \frac{(1+\delta)_{k|}\ddot{a}_x + \alpha + \beta \ddot{a}_{xk}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{xk}}$$

zdroj: autor

Příklad

- Měsíční brutto pojistné na 100 Kč měsíčního doživotního důchodu pro 40letého muže, odklad k věku 60 let.

$$1200 \cdot B_{40,20}^{(12)} = 1200 \cdot \frac{(1+\delta) \cdot \left[{}_{20|}\ddot{a}_{40} - \frac{11}{24} \cdot \frac{D_{60}}{D_{40}} \right] + \alpha + \beta .[\ddot{a}_{40,20} - \frac{11}{24} \cdot \left(1 - \frac{D_{60}}{D_{40}} \right)]}{(1-\gamma) \cdot 12 \cdot [\ddot{a}_{40,20} - \frac{11}{24} \cdot \left(1 - \frac{D_{60}}{D_{40}} \right)]} = 61{,}96$$

zdroj: autor

Pojištění s výhradou

- Výhrada vrácení pojistného v případě smrti pojištěného se využívá v situacích, kdy v případě smrti pojištěného by jinak pojištění zaniklo bez náhrady
- V případě smrti se vrací zaplacené neúročené pojistné

Pojištění pro případ dožití

$$B_{xn} = \frac{{}_nE_x + \alpha + \beta \ddot{a}_{xn}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{xn} - \left(IA_{xn}\right)}$$

zdroj: autor

Pojištění více životů

- Pojistné plnění je závislé na životě nebo smrti (příp. zdravotním stavu) dvou nebo více osob :
  - manželů
  - rodičů a dětí
  - obchodních společníků
- Omezíme se na dvojici – pojištění dvojic
- Označení (x,y)

    1.člen muž – věk x

    2.člen žena – věk y

Pojištění více životů

- Správně by se měly používat následující charakteristiky
  - l_{xy} ...počet dvojic z výchozího kořene $l_{x-y,0}$, které přežily do věku x a y
  - q_{xy} ...pravděpodobnost, že dvojice ve věku (x,y) zanikne před dosažním věku (x+1, y+1)
  - p_{xy} ...pravděpodobnost, že dvojice přežije do stavu (x+1, y+1)

Pojištění více životů

- Sestavení takových dvojrozměrných (skupinových) tabulek je velmi obtížné, volí se přístup spočívajíci na aproximaci

$$l_{xy} \approx l_x \cdot l_y$$

- Pak bude :

$$P_{xy} = \frac{l_{x+1,y+1}}{l_{xy}} \approx \frac{l_{x+1} \cdot l_{y+1}}{l_x \cdot l_y} = p_x \cdot p_y$$

zdroj: autor

- To znamená, že aproximace bude platit jako rovnost v případě nezávislého úmrtnostního chování mužů a žen – **přijatelý předpoklad**

Pojištění dvojice osob pro případ dožití

- Pojistná částka je vyplacena, pokud se obě osoby dožijí konce pojistné doby sjednané ve smlouvě

$$ {}_nE_{xy} = \frac{l_{x+n,y+n} \cdot v^n}{l_{xy}} = \frac{l_{x+n,y+n} \cdot v^{\frac{1}{2}(x+n+y+n)}}{l_{xy} \cdot v^{\frac{1}{2}(x+y)}} = \frac{D_{x+n,y+n}}{D_{xy}} $$

zdroj: autor

Příklad

- Jaké je jednorázové nettopojistné na 1000 Kč pojistné částky pro dvojici – muž 40 let, žena 30 let, na dožití se dalších 20 let.

$$1000 \cdot {}_{20}E_{40,30} = 1000 \cdot \frac{l_{60}^{M} \cdot l_{50}^{Ž} \cdot v^{20}}{l_{40}^{M} \cdot l_{30}^{Ž}} =$$

$$1000 \cdot \frac{l_{60}^{M} \cdot l_{45}^{M} \cdot v^{20}}{l_{40}^{M} \cdot l_{25}^{M}} = 344,98$$

zdroj: autor

Smíšené pojištění dvojice osob

- Pojistná částka je vyplacena při prvé smrti v uvažované dvojici, nejpozdeji ale po uplynutí doby n

$$A_{xy,n} = \frac{M_{xy} - M_{x+n,y+n} + D_{x+n,y+n}}{D_{xy}} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{\mathrm{xy,n}}$$

zdroj: autor

Pojištění důchodu dvojice osob

- **Do první smrti** – důchod je vyplácen pokud oba žijí

$$\text{ä}_{xy} = \frac{l_{xy} + l_{x+1,y+1} + \ldots}{l_{xy}} = \frac{D_{xy} + D_{x+1,y+1} + \ldots}{D_{xy}} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}}$$

- **Do druhé smrti** - důchod je vyplácen pokud je naživu aleaspoň 1 osoba

$$\text{ä}_{\overline{xy}} = \text{ä}_{x} + \text{ä}_{y} - \text{ä}_{xy}$$

zdroj: autor

Pojištění důchodu dvojice osob

- **Od první smrti do druhé smrti** – důchod je vyplácen, pokud je naživu právě 1 osoba z uvažované dvojice

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{[1]} = \ddot{a}_{\overline{xy}} - \ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_{x} + \ddot{a}_{y} - 2\ddot{a}_{xy}$$

zdroj: autor

Pojištění důchodu dvojice osob

- **Jednostranné pojištění důchodu pro přežívajícího** - důchod je vyplácen po smrti 1. osoby druhé osobě z dvojice (a naopak)
  - vdovský $\ddot{a}_{y/x} = \ddot{a}_{y} - \ddot{a}_{xy}$
  - vdovecký $\ddot{a}_{x/y} = \ddot{a}_{x} - \ddot{a}_{xy}$

zdroj: autor

Rezervy v životním pojištění

- Technické rezervy – k plnění závazků z pojišťovací činnosti, součást pasiv

Některé druhy rezerv:

- Rezerva pojistného ŽP – ke krytí budoucích závazků, netto/brutto, rozdíl mezi pojistnou částkou a rezervou = rizikový kapitál
- Rezerva na nezasloužené pojistné – pojistné budoucích účetních období (zaplatím např. čtvrtletně předlhůtně)

Způsob umístění rezerv

- Dluhopisy (státní, bankovní, veřejně obchodovatelné)
- Půjčky, úvěry vůči podnikatelům, za jejichž splacení ručí banka
- Nemovitosti
- Hypotéky do výše 50% řádně pojištěné nemovitosti
- atd

Co nutí pojišťovny vytvářet rezervu

- Životní a neživotní pojišťovny – rozdílný přístup
  - v **životním pojištění :**
    - je roční pojistné **konstantní** pro každý rok předem stanovené doby
    - **riziko narůstá** s rosoucím věkem pojištěného
  - v **neživotním** pojištění :
    - uplatňuje se **přirozené** pojistné
    - zaplatí pojištění riziko na jedno pojistné období dopředu s tím, že na konci období je pojistné spotřebováno

Co nutí pojišťovny vytvářet rezervu

$$P = q_1 \cdot q_2 \cdot S$$

q_1 ...škodní frekvence

jako odhadnutý počet pojistných událostí v daném roce k odhadnutému počtu pojistných smluv

q_2 ...škodní rozsah

jako odhadnutá průměrná škoda v daném roce k odhadnuté průměrné pojistné částce

zdroj: autor

Příklad

- Jaké by bylo roční přirozené nettopojistné na 1000 Kč pojistné částky v 1., 10., 20. roce pojištění 40letého muže na 20 let

  a)v dočasném pojištění pro případ smrti

  b)ve smíšeném

zdroj: autor

a)1.rok $P = q_{40} \cdot S = 0{,}002201 \cdot 1000 = 2{,}20$

10.rok $P = q_{49} \cdot S = 0{,}006090 \cdot 1000 = 6{,}09$

20.rok $P = q_{59} \cdot S = 0{,}015904 \cdot 1000 = 15{,}90$

škodní frekvence q_1=pravděpodobnost úmrtí

škodní rozsah q_2=1

Příklad

zdroj: autor

b) 1.rok $P = 2{,}20$

10.rok $P = 6{,}09$

20.rok $P = (q_{59} + p_{59}) \cdot S = S = 1000$

Kdyby se využil tento přístup, platil by klient v 10.roce trojnásobek 1.roku a v posledním roce

a)šestinásobek

b)celou pojistnou částku

Příklad

- Tedy v životním pojištění se nehodí princip přirozeného pojistného
- Klient v prvních letech platí více, než je zapotřebí a pak méně než je zapotřebí
- Z přebytků pojistného v prvních letech se vytvoří rezerva pro léta následující

Nettorezerva

- Odhlížíme od správních nákladů
- Uvažujeme pojištění se vstupním věkem x a pojistnou dobou n
- Za roční nettopojistné P_{xn} poskytuje na konci t-ého roku t=1,2,...n
  - pojistné plnění ve výši a_t při dožití t-tého roku
  - pojistné plnění ve výši b_t při úmrtí během t-tého roku

Nettopojistné

- Pojišťovna by měla nashromáždit z přebytku pojistného v prvních letech každé pojistné smlouvy (a z odp.úroků) určitou částku, aby v pozdějších letech mohla dostát svým závazkům
- Tato částka souvisí s **hodnotou pojistné smlouvy –**
  - Hodnota pojistné smlouvy v čase t = očekávaná hodnota výdajů v čase t – očekávaná hodnota příjmů v čase t

Nettopojistné

- Očekávané výdaje v čase t – jsou diskontované budoucí výdaje od t do současnosti pomocí poj.technické úrokové míry
- Hodnota pojistné smlouvy se též nazývá matematická rezerva
- Aby pojišťovna mohla dostát svým závazkům, musí ukádat prostředky ve výši hodnoty pojistné smlouvy

Rekurentní vzorec pro nettorezervu

$$\left[\left({}_{t-1}V_x + {}_n P_x\right) \cdot l_{x+t-1} \cdot (1+i)\right] - \left(a_t l_{x+t} + b_t \cdot d_{x+t-1}\right) = {}_t V_x \cdot l_{x+t} \quad / v^{x+t}$$

$$= {}_t V_x \cdot D_{x+t}$$

zdroj: autor

Rekurentní vzorec pro nettorezervu

- Retrospektivní způsob výpočtu rezervy

$$
{}_tV_x = \frac{{}_nP_x \sum_{j=0}^{t-1} D_{x+j} - \sum_{j=1}^{t} (a_j \cdot D_{x+j} + b_j \cdot C_{x+j-1})}{D_{x+t}}
$$

zdroj: autor

Rekurentní vzorec pro nettorezervu

- Prospektivní způsob výpočtu rezervy

$$ {}_tV_x = \frac{\sum_{j=t+1}^{n} \left(a_j \cdot D_{x+j} + b_j \cdot C_{x+j-1} \right) - {}_nP_x \sum_{j=t+1}^{n} D_{x+j-1}}{D_{x+t}} $$

zdroj: autor

Rekurentní vzorec pro nettorezervu

- Retrospektivní a prospektivní způsob výpočtu rezervy dávají **shodné výsledky**

  minulé příjmy – minulé výdaje = budoucí výdaje – budoucí příjmy

  - retrospektivní

    →odpovídá to tvorbě rezervy

  - prospektivní

    →používá se v praxi, lze zohlednit budoucí změny

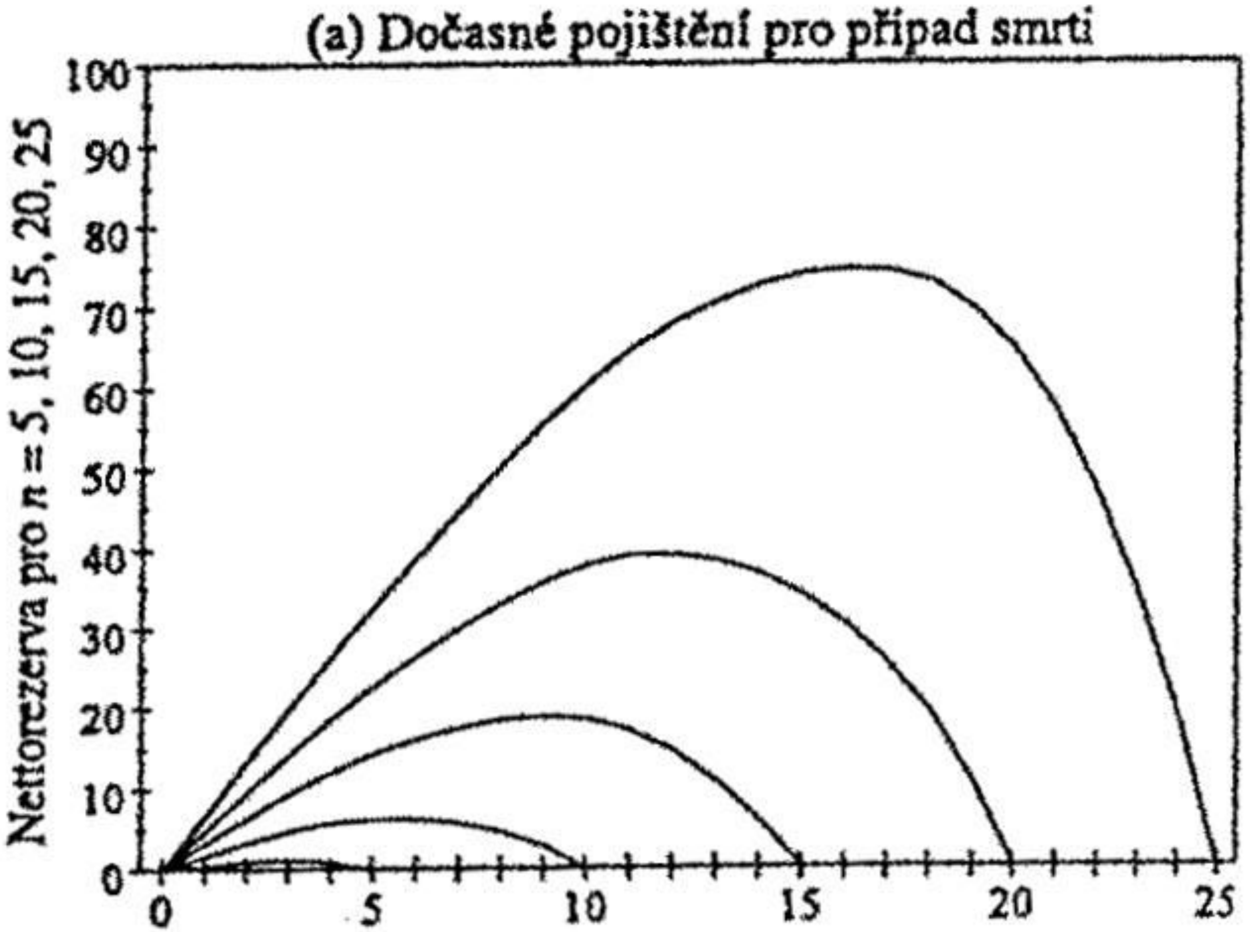
Rekurentní vzorec pro nettorezervu

- Prospektivní
  - Výpočet může být jednodušší, např. pokud se dále neplatí pojistné od (t+1)-tého roku

$$
{}_tV_{xn} = \frac{\sum_{j=t+1}^{n}\left(a_j \cdot D_{x+j} + b_j \cdot C_{x+j-1}\right)}{D_{x+t}}
$$

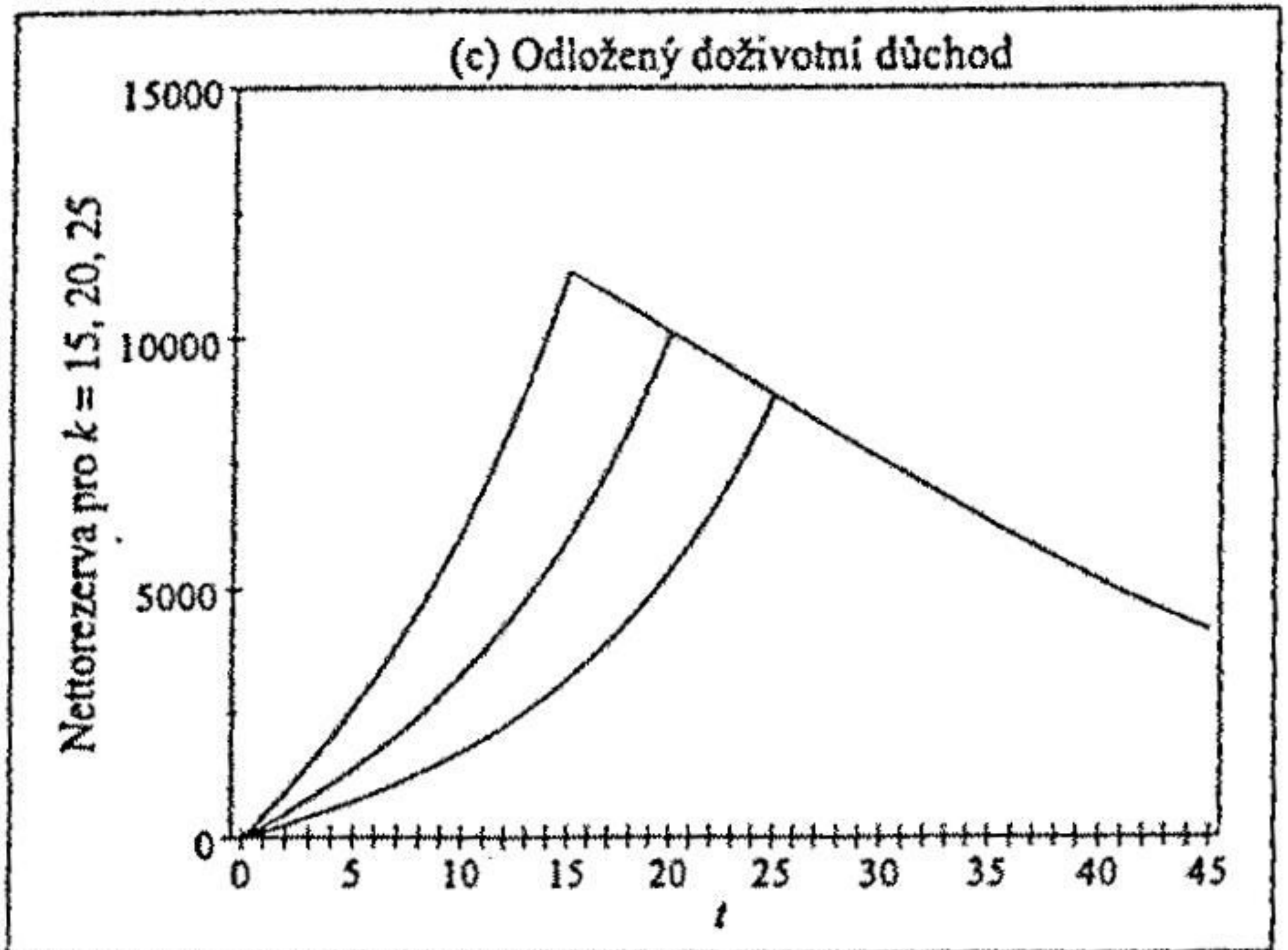
zdroj: autor

- Rezerva(t)=očekávané budoucí výdaje(t)-očekávané budoucí příjmy(t)
- Dle zákona nesmí být záporná (pokud vyjde záporná – nahrazuje se nulou)
- S ohledem na kalkulaci pojistného je rezerva(0)=0

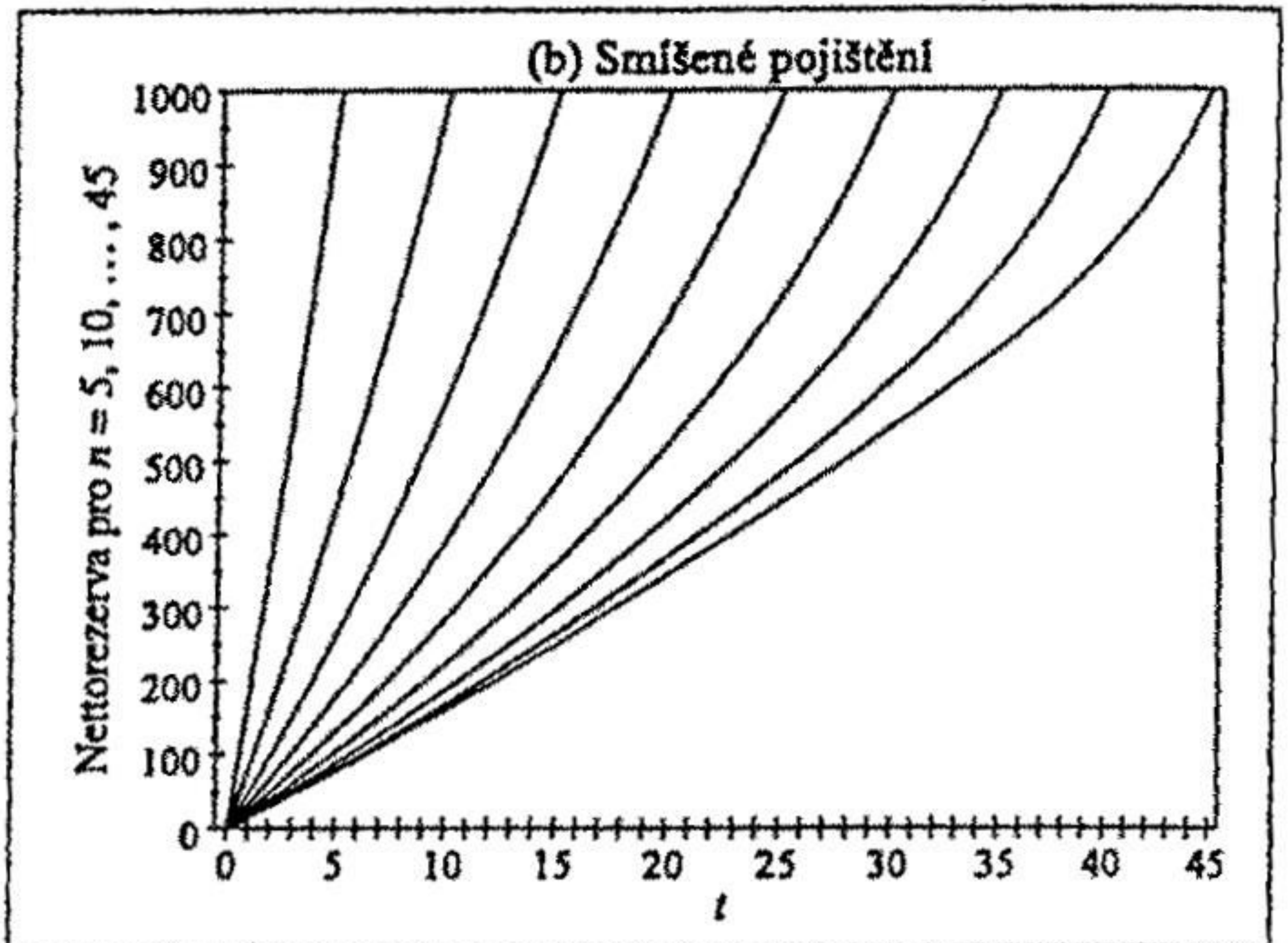


(a) Dočasné pojištění pro případ smrti
Nettorezerva pro n = 5, 10, 15, 20, 25
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
5
10
15
20
25

zdroj: autor


(c) Odložený doživotní důchod
Nettorezerva pro k = 15, 20, 25
15000
10000
5000
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45
t

zdroj: autor


(b) Smíšené pojištění
Nettorezerva pro n = 5, 10, ..., 45
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
t

zdroj: autor