EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

K předmětu 1BP305 Pojistná matematika

Vybrané postupy a pojmy životního pojištění

Říjen 2019

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Základní pojmy

Pojištění: nástroj finanční eliminace negativních důsledků nahodilosti;

Pojistitel: právnická osoba, provozovatel pojištění

Pojistník: osoba, která s pojistitelem uzavřela pojistnou smlouvu a má povinnost platit pojistné

Pojištěný (pojištěnec): osoba, na jejíž život nebo zdraví se pojištění vztahuje. Přenáší svá rizika, jejichž potenciální škodní důsledky nezávislé na své vůli jsou z jeho individuálního hlediska neúnosné, na pojistitele (pojišťovna, stát, penzijní společnost), který při dostatečném počtu pojistných smluv (pojistný kmen) je schopen s pomocí celkově přijatého pojistného tato rizika krýt a učinit je i předmětem výnosného podnikání;

Oprávněná osoba (obmyšlený): osoba (fyzická či právnická), která má právo na výplatu pojistného plnění v případě smrti pojištěného; není-li uveden, postupuje se podle ObčZ jako při dědictví

Pojistné:

- jednorázové – platí se při uzavření smlouvy;
- běžné – platí se opakovaně na počátku období – splátky stejné výše;
    - možné slevy při častějším placením pojistného (např. při měsíčním placení sleva 5% vůči ročnímu placení)

- nettopojistné – je vypočteno tak, aby v průměru pokrylo pojistné plnění pojišťovny,
- bruttopojistné – je definováno jako nettopojistné + správní náklady
    - obsahuje také bezpečností přirážku – např. použití starších úmrtnostních tabulek či posuny věku v aktuální úmrtnostní tabulce

Odbytné: vyplácí se pojistníkovi na základě žádosti o zrušení pojištění

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Výpočty v oblasti životního pojištění

Při kalkulaci pojistného v životním pojištění a v pojištění vůbec vycházíme z **principu ekvivalence**. Podle tohoto přístupu by mělo platit, že příjmy a výdaje by měly být v rovnováze.

Příjmy a výdaje se nerovnají v každém období, ale platí:

E(P) = E(V);

E(P) - střední hodnota příjmů, tj. střední hodnota přijatého pojistného

E(V) - střední hodnota výdajů, tj. střední hodnota vyplaceného pojistného plnění.

Tyto finanční toky ovšem nenastávají v tentýž okamžik, proto jsou využívány finančně matematické postupy, zejména současná, ale též budoucí hodnota – tj. současné hodnoty v průměru očekávaných finančních toků.

Pro konstrukci výše pojistného potřebujeme odhadnout hodnotu budoucího pojistného plnění, které pak rozpočítáme na jednotlivé pojistky.

$$\sum_i PPv^i p_i = \text{E(PP*v)}$$

E(PP*v) současná střední hodnota pojistného plnění
PP pojistné plnění
v diskontní faktor: $v^n = \dfrac{1}{(1+i)^n}$,
i technická úroková míra,
n počet období, o které se diskontuje
p pravděpodobnost nastoupení náhodné veličiny, tj. smrt nebo dožití

Technická úroková míra (TÚM) je úroková míra, kterou používají pojišťovny při výpočtu pojistného v životním pojištění či rezervy životního pojištění

Je-li S – budoucí hodnota (pojistná částka) a P – současná hodnota (jednorázové pojistné), bude:

- pro malé i a pro dané S nutné velké P, tj. velká cena pojistných produktů a negativní působení konkurenčních tlaků,
- pro velké i a pro dané S stačit malé P, sympatické nízké pojistné, vytváří se ale nízké rezervy z inkasovaného pojistného

Dekrementní nástroje
Úmrtnostní tabulka (life table LT) = dekrementní řád vymírání populace;

počet zemřelých ve věku x *(tj. po dosažení věku x před dosažením věku x+1):* $\boldsymbol{d_x}$
počet přežívajících *z věku x do věku x+1:* $\boldsymbol{l_x}$
pravděpodobnost úmrtí ve věku x... $\boldsymbol{q_x}$,
pravděpodobnost dožití věku x+1... $\boldsymbol{p_x}$

Pak platí níže uvedené vztahy

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad , \qquad l_{x+1} = l_x - d_x$$

$$_n d_x = l_x - l_{x+n} = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots d_{x+n-1} = \int_0^n l_{x+t}\mu_{x+t}\,dt$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \; q_x = \frac{d_x}{l_x}, \; {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \; {}_n q_x = \frac{_n d_x}{l_x}$$

$$_{k|}\, q_x = \frac{d_{x+k}}{l_x}, \; {}_{k|n} q_x = \frac{_n d_{x+k}}{l_x} = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+n}}{l_x}$$

$$S_0(x) = \frac{l_x}{l_0}$$

zdroj: autor

Vyrovnávání v úmrtnostních tabulkách: grafické, analytické– např. Gompertz-Makehamovou, mechanické vyrovnávání, klouzavé průměry – např. Wittsteinova metoda (tj. 9tičlenný klouzavý průměr s vahami {1,2,3,4,5,4,3,2,1}) – viz dále

Příklad:

Jaké jednorázové pojistné zaplatí 40letý muž v pojištění pro případ smrti na 5 let s pojistnou částkou 1 mil. Kč – tzv. životní úvěrové poj. (většinou nutné pro úvěr od banky)

$$pojistné = \frac{1000000(d_{40}v + d_{41}v^2 + \ldots + d_{44}v^5)}{l_{40}} =$$

$$1000000 * (q_{40}v + q_{41}p_{40}v^2 + q_{42} \cdot {}_2 p_{40}v^3 + q_{43} \cdot {}_3 p_{40}v^4 + q_{44} \cdot {}_4 p_{40}v^5) =$$

$$1mil \cdot ({}_{0/}q_{40} \cdot v + {}_{1/}q_{40} \cdot v^2 + {}_{2/}q_{40} \cdot v^3 + {}_{3/}q_{40} \cdot v^4 + {}_{4/}q_{40} \cdot v^5) = 12575\ Kč$$

zdroj: autor

Komutační čísla

tabelované hodnoty, vznikají kombinací dekrementních a finančních postupů, k zpřehlednění pojistně-technických výpočtů

$$D_x = l_x . v_x$$
$$C_x = d_x . v_{x+1}$$
$$C_x = D_x v - D_{x+1}, nebo\check{t} \ldots C_x = d_x v^{x+1} = (l_x - l_{x+1})v^{x+1} = D_x v - D_{x+1}$$
$$D_x \ldots N_x = \sum D_x \ldots S_x = \sum N_x$$
$$C_x \ldots M_x = \sum C_x \ldots R_x = \sum M_x$$

zdroj: autor

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Komutační čísla nultého řádu
Dx - diskontovaný počet dožívajících se věku x
Cx - diskontovaný počet zemřelých ve věku x

Komutační čísla 1. řádu:

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega = \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j}$$

Nx

Komutační čísla 2. řádu

$$S_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} N_{x+j}, R_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} M_{x+j}$$

Rx

Příklad se zjednoduší:

$$= 1 mil \cdot \frac{C_{40} + C_{41} + C_{42} + C_{43} + C_{44}}{D_{40}} = \; = 1 mil \cdot \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}} = 12575$$

zdroj: autor

Počáteční (současná) hodnota pojištění
- částka, kterou pojišťovna bude muset v průměru proplatit na 1 pojistnou smlouvu, přičemž diskontování se provádí pomocí přijaté pojistně-technické úrokové míry k okamžiku uzavření pojištění
- je zároveň jednorázovým nettopojistným
- je východiskem pro většinu výpočtů

Jednotkové jednorázové pojistné jednotlivých pojistných produktů – tj. pro jednotkovou pojistnou částku nebo jednotkový důchod

Typy pojištění v životním pojištění

- pojištění pro případ smrti
  - trvalé
  - dočasné
  - odložené
- pojištění na dožití se věku
- smíšené pojištění
- pojištění s pevnou dobou výplaty

NETTO POJISTNÁ JEDNORÁZOVÁ

jedná se vždy o kalkulaci jednotkového pojistného

platí vztah: $E(PP*v) = \sum_i PPv^i p_i) = PP \sum_i v^i p_i$

zdroj: autor

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

PP=1, ale lze dosadit

KALKULACE PRO PŘÍPAD SMRTI

1. trvalé pojištění A_x

jednotková platba na konci roku, v němž nastala smrt
přístup podle náhodné veličiny Z

$Z = v^{K_{x+1}}$ pro K_x =0,1,2,…

A_x =

$$E(Z)=\sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x . q_{x+k} . v^{k+1} = \frac{d_x}{l_x} v + \frac{d_{x+1}}{l_x} v^2 + \ldots = \frac{d_x v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + \ldots}{l_x v^x} = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$

V praxi se toto pojištění nazývá též pojištění pohřbu

zdroj: autor

2. dočasné pojištění $A^1_{x:\bar{n}|}$

pojištění trvá na dobu n let a výplata pojistného plnění se uskuteční v případě smrti během n let a to na konci období, kdy došlo k úmrtí

$Z = v^{K_{x+1}}$ pro K_x =0,1,2,…, n-1

$Z = 0$ pro K_x =n, n+1,…

$$A^1_{x:\bar{n}|} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x . q_{x+k} . v^{k+1} = \frac{d_x}{l_x} v + \frac{d_{x+1}}{l_x} v^2 + \ldots \frac{d_{x+n-1}}{l_x} v^{n-1} =$$

$$= \frac{d_x v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + \ldots + d_{x+n-1} v^{x+n-1}}{l_x v^x} = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

V praxi se toto pojištění využívá též jako úvěrové pojištění

zdroj: autor

3. odložené ${}_{m|}A_x$

jednotková platba na konci roku, v němž nastala smrt, ale při úmrtí v prvních m letech se nic nevyplatí z důvodu sjednaného odložení pojistné ochrany

$Z = 0$ pro K_x =0,1,2,…, m-1

$Z = v^{K_{x+1}}$ pro K_x =m, m+1

$${}_{m|}A_x = E(Z) = \sum_{k=m}^{\infty} {}_k p_x . q_{x+k} . v^{k+1} = \frac{d_{x+m}}{l_x} v^{m+1} + \frac{d_{x+m+1}}{l_x} v^{m+2} + \ldots =$$

$$= \frac{d_{x+m} v^{x+m+1} + d_{x+m+1} v^{x+m+2} + \ldots}{l_x v^x} = \frac{C_{x+m} + C_{x+m+1} + \ldots}{D_x} = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

zdroj: autor

platí vztah mezi těmito druhy pojištění: za podmínky že n(viz 2)=m(viz 3)

$A_x = A_{x:\bar{n}|} + {}_{n|}A_x$

KALKULACE PRO PŘÍPAD DOŽITÍ ${}_nE_x$ nebo $A_{x:\bar{n}|}^{\;1}$

pojištění pro případ dožití na dobu n let poskytuje plnění, pokud je osoba pojištěná ve věku x naživu na konci n let

Výpočet PV lze formulovat jako výpočet střední hodnoty vhodně zvolené náhodné veličiny,
$Z = 0$ pro K_x =0,1,2,…, n-1
$Z = v^n$ pro K_x =n, n+1

$$ {}_nE_x = E(Z) = {}_np_x v^n = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n = \frac{l_{x+n} v^{x+n}}{l_x v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

Pomocí náhodné veličiny lze stanovit i riziko pojištění(směrod.odchylku Z)

$$ riziko = \sqrt{\operatorname{var}(Z)} = \sqrt{E(Z^2) - [E(Z)]^2} = \sqrt{v^{2n} {}_np_x - ({}_nE_x)^2} $$

- > riziko na 1Kč PČ

KALKULACE PRO SMÍŠENÉ POJIŠTĚNÍ $A_{x:\overline{n}|}$

pojišťovna vyplatí pojistné plnění na konci roku, v němž osoba pojištěná ve věku x zemřela, nejpozději ale při dožití konce sjednané doby n

$Z = v^{Kx+1}$ pro K_x =0, 1, 2, …, n-1
$Z = v^n$ pro K_x = n, n+1

$$ A_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x . q_{x+k} . v^{k+1} + {}_np_x v^n = A^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} $$

$$ A_{x:\overline{n}} = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1} + D_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} $$

zdroj: autor

V ČR tento druh životního pojištění nejčastější.
Modifikace:

- výplata trojnásobné částky v případě smrti: $1000\dfrac{3(M_x - M_{x+n}) + D_{x+n}}{D_x}$
- výplata dvojnásobné částky v případě dožití: $1000\dfrac{M_x - M_{x+n} + 2D_{x+n}}{D_x}$

zdroj: autor

KALKULACE PRO POJIŠTĚNÍ S PEVNOU DOBOU VÝPLATY

pojišťovna vyplatí pojistnou částku na konci n-tého období bez ohledu na to, zda osoba pojištěná ve věku x žije. Cílová částka se tedy vyplácí vždy.
Uzavírá se pouze za běžné pojistné, v případě smrti nebo invalidity pojistníka pojišťovna přebírá povinnost platby pojistného místo něj.
Komerční názvy – studijní, stipendijní, věnové, svatební pojištění;
Např. rodiče uzavřou pojištění při narození dítěte – rodič=pojistník, dítě=oprávněný -> vyplácí se najednou nebo v několika anuitách (není vázáno na podmínku sňatku nebo studia)

$Z = v^n$ pro K_x = 0, 1, …, n, n+1, …
$E(Z) = v^n$

KALKULACE DŮCHODOVÝCH POJIŠTĚNÍ

- odvození životního důchodu
  - doživotní důchod
  - dočasný životní důchod
  - odložený životní důchod
  - ukázka področních důchodů
- běžná netto pojistná

Doživotní důchod – jednotkový, roční, předlhůtní: $\ddot{a}_x$

kolik je nutno jednorázově zaplatit, aby pojišťovna doživotně od teď vyplácela jednotkový důchod za rok;
pojišťovna vyplácí důchod sjednané výše vždy na počátku pojistného roku, pokud osoba pojištěná ve věku x žije:

$$Z = \ddot{a}_{\overline{Kx+1}|}$$

$$\ddot{a}_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}q_x . \ddot{a}_{\overline{k+1}|} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x . v^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

zdroj: autor

Doživotní důchod – jednotkový, roční, polhůtní: a_x;

pojišťovna vyplácí důchod sjednané výše vždy na konci pojistného roku, pokud osoba pojištěná ve věku x žije:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} = \ddot{a}_x - 1$$

zdroj: autor

Dočasný důchod – jednotkový, roční, předlhůtní: $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

komerční pojišťovny toto pojištění moc neprodávají, používají ho penzijní společnosti.

$Z = \ddot{a}_{\overline{Kx+1}|}$ pro $K_x = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$Z = \ddot{a}_{\overline{n}|}$ pro $K_x = n, n+1, \ldots$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x . \ddot{a}_{\overline{k+1}|} + {}_n p_x . \ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x . v^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

zdroj: autor

Dočasný důchod – jednotkový, roční, polhůtní: $a_{x:\overline{n}|}$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} = \ddot{a}_{x:\overline{n+1}|} - 1$$

Doživotní důchod odložený o m období – jednotkový, roční, předlhůtní $_{m|}\ddot{a}_x$

Pojištění odloženého doživotního důchodu s dobou odkladu m

-pojistka uzavřena nyní, pak se m let nic neděje, poté dochází k výplatě

-v případě smrti v době odkladu propadá výplata pojistného, může se krátit, přejít na manželku..

$Z = 0$ pro $K_x = 0,1,2,\dots, m-1$

$Z = \ddot{a}_{\overline{kx+1}|}$ pro $K_x = m, m+1, \dots$

$$_{m|}\ddot{a}_x = E(Z) = \sum_{k=m}^{\infty} {}_{k|}q_x.\ddot{a}_{\overline{k+1}|} = \sum_{k=m}^{\infty} {}_k p_x.v^k = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \frac{D_{x+m} + D_{x+m+1} + \dots}{D_x} = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

zdroj: autor

Doživotní důchod odložený o m období – jednotkový, roční, polhůtní $_{m|}a_x$

$$_{m|}a_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x} = {}_{m+1|}\ddot{a}_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x.\ddot{a}_{\overline{k+1}|} + {}_n p_x.\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x.v^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \frac{D_x + D_{x+1} + \dots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

zdroj: autor

Vztah mezi předlhůtním a polhůtním důchodem

$a_x = \ddot{a}_x - 1$,

$_m/a_x = {}_{m+1}/\ddot{a}_x$,

$$a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n+1}|} - 1$$

Aproximativní vzorce pro področní důchody

– značení zůstává

s …důchod je vyplácen s-krát ročně: s=12 tj.měsíční důchod

$$\ddot{a}_x^{(s)} = \ddot{a}_x - \frac{s-1}{2s} \qquad a_x^{(s)} = a_x + \frac{s-1}{2s}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x^{(s)} = {}_{m|}\ddot{a}_s - \frac{s-1}{2s}\frac{D_{x+s}}{D_x} \qquad _{m|}a_x^{(s)} = {}_{m|}a_s + \frac{s-1}{2s}\frac{D_{x+s}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(s)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{s-1}{2s}(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}) \qquad a_{x:\overline{n}|}^{(s)} = a_{x:\overline{n}|} + \frac{s-1}{2s}(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x})$$

zdroj: autor

Vztahy jednorázového pojistného mezi pojistkami důchodovými a jednorázově vyplácenými

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x .... d = 1 - v = \frac{i}{1+i}$$

$$A^1{}_{x:\overline{n}} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}} - {}_n E_x$$

$$A_{x:\overline{n}} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}}$$

zdroj: autor

Pojištění s proměnným pojistným plněním

a) dočasné pojištění pro případ smrti s rostoucí pojistnou částkou typu 1,2,…,n

$$(IA)^1{}_{x:\overline{n}} = \frac{C_x + 2C_{x+1} + ... + nC_{x+n-1}}{D_x} = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}$$

b) dočasné pojištění pro případ smrti s klesající pojistnou částkou

$$(DA)^1{}_{x:\overline{n}} = \frac{nC_x + (n-1)C_{x+1} + ... + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{{}_nM_x - R_{x+1} + R_{x+n+1}}{D_x}$$

zdroj: autor

POJISTNÁ BĚŽNÁ

BĚŽNÉ NETTO POJISTNÉ:

- platí se v pravidelných splátkách – stejná výše a na počátku pravidelných pojistných období
- může se platit jen po určitou dobu, nebo po celou dobu trvání pojištění
- roční nettopojistné se platbou ve výši P na jednotkovou pojistnou částku nebo jednotkový důchod placené vždy na začátku každého pojistného roku = důchod vyplácený pojistníkem pojistiteli

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = PP \cdot A, \quad P = PP \cdot \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

zdroj: autor

P = běžné netto pojistné,
PP = pojistné plnění,
A = jednotkové jednorázové netto pojistné,
$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ = jednotkový důchod – v tomto případě pro pojišťovnu

KALKULACE PRO PŘÍPAD SMRTI

1) trvalé

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x}$$

zdroj: autor

2) dočasné

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

zdroj: autor

KALKULACE PRO PŘÍPAD DOŽITÍ

- $P_{x:\overline{n}|} = \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$ případ, kdy se platí pojistné po celou dobu trvání pojistné ochrany
  zdroj: autor
- pojištění odloženého doživotního důchodu (běžné pojistné se platí během doby odkladu m)

  $$P_{x:\overline{m}|} = \frac{{}_{m|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}}$$

  zdroj: autor

KALKULACE VE SMÍŠENÉM POJIŠTĚNÍ

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

zdroj: autor

KALKULACE V POJIŠTĚNÍ S PEVNOU DOBOU VÝPLATY

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{v^n}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{v^n + D_x}{N_x - N_{x+n}}$$

zdroj: autor

KALKULACE V POJIŠTĚNÍ ODLOŽENÉHO DOŽIVOTNÍHO DŮCHODU

(Běžné pojistné se platí během odkladu k)

$${}_kP_x = \frac{{}_{k/}\ddot{a}_x}{a_{x:\overline{k}}} = \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+k}}$$

zdroj: autor

tyto vzorce lze různě modifikovat podle potřeby – zaměňovat roční platby za področní apod.

BRUTTO POJISTNÁ

Bruttopojistné =nettopojistné + správní náklady (bezpečnostní přirážka implicitně obsažena v nettopojistném)

- počáteční jednorázové náklady (získávací náklady) α: Vynakládají se při uzavírání pojistné smlouvy – jedná se především o nejrůznější provize pro pojistné agenty, makléře. α = procento z pojistné částky nebo z ročního důchodu
- běžné správní náklady β: jsou to každoroční náklady během trvání pojištění spojené s jeho udržováním (pronájem budov, IT, administrativa, korespondence…). Uvádí se jako procenta (či promile) z pojistné částky nebo z ročního důchodu. Jestliže je doba placení pojistného kratší než pojistná době (př.jednorázové pojistné vždy), uvažují se

zvlášť běžné správní náklady $\boldsymbol{\beta_1}$ během celého trvání pojištění a běžné správní náklady $\boldsymbol{\beta_2}$- během placení pojistného: $\beta=\beta_1+\beta_2$

- inkasní náklady $\boldsymbol{\gamma}$: Jsou spojeny s inkasem (běžného) pojistného. Započítávají se jako procenta z ročního bruttopojistného – souvisejí s výší částky inkasované od klienta
- náklady při výplatě důchodu $\boldsymbol{\delta}$: vznikají jen u důchodového pojištění jako náklady spojené s výplatami důchodu. Započítávají se jako procenta z ročního důchodu
- jednotná správní přirážka $\boldsymbol{\varepsilon}$ některé pojišťovny slučují všechny uvedené druhy do jednotné přirážky. Počítá se jako procento z bruttopojistného

Označíme:
JB jednorázové bruttopojistné
B běžné bruttopojistné

KALKULACE PRO PŘÍPAD SMRTI

zdroj: autor

$$JB_x = A_X + \alpha + \beta_1 \ddot{a}_X$$

trvalé :

$$B_{x:\overline{n}|} = \frac{A_X + \alpha + \beta.\ddot{a}_X}{(1-\gamma)\ddot{a}_X}$$

$$JB_x = A^1_{X:\overline{N}|} + \alpha + \beta_1 \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

dočasné :

$$B_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{X:\overline{N}|} + \alpha + \beta.\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

KALKULACE PRO PŘÍPAD DOŽITÍ

zdroj: autor

pojištění odloženého doživotního důchodu

$$JB_x = (1+\delta)_{m|}\ddot{a}_x + \alpha + \beta_1 \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$B_{x:\overline{n}|} = \frac{(1+\delta)_{m|}\ddot{a}_x + \alpha + \beta.\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

KALKULACE PRO SMÍŠENÉ POJIŠTĚNÍ

zdroj: autor

$$JB_x = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta_1 \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$B_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta\ .\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

KALKULACE V POJIŠTĚNÍ DOŽIVOTNÍHO DŮCHODU

zdroj: autor

$$JB_x = \frac{(1-\delta)\ddot{a}_x + \alpha}{1-\gamma}$$

KALKULACE V POJIŠTĚNÍ ODLOŽENÉHO DOŽIVOTNÍHO DŮCHODU zdroj: autor

$$JB_x = \frac{(1+\delta)_{k/}\ddot{a}_x + \alpha + \beta\ddot{a}_{x:\overline{k}}}{1-\gamma}$$

$$_kB_x = \frac{(1+\delta)_{k/}\ddot{a}_x + \alpha + \beta\ddot{a}_{x:\overline{k}}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{x:\overline{k}}}$$

POJIŠTĚNÍ S VÝHRADOU zdroj: autor

=např. pojištění pro případ dožití za běžné pojistné s výhradou vrácení pojistného v případě smrti pojištěného,
smrt není pojistnou událostí,
výhrada=vrací se dosud zaplacené pojistné

$$_nB_x = \frac{_nE_x + \alpha + \beta\ddot{a}_{x:\overline{n}}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{x:\overline{n}} - (IA)^1{}_{x:\overline{n}}}$$

neboť ze vzorce

$$_nB_x = \frac{_nE_x + \alpha + \beta\ddot{a}_{x:\overline{n}} + {}_nB_x(IA)^1{}_{x:\overline{n}}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{x:\overline{n}}}$$

plyne, že při úmrtí v prvním roce se vrací 1*$_nB_x$,
při úmrtí ve 2. roce se vrací 2* $_nB_x$,
při úmrtí v n-tém roce se vrací n* $_nB_x$ =>proto člen $(IA)^1{}_{x:n}$

= pojištění odloženého doživotního důchodu za běžné pojistné s výhradou vrácení pojistného v případě smrti pojištěného během doby odkladu

$$_kB_x = \frac{(1+\delta)_{k/}\ddot{a}_x + \alpha + \beta\ddot{a}_{x:\overline{k}}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{x:\overline{k}} - (IA)^1{}_{x:\overline{k}}}$$

podle výše uvedeného postupu lze odvodit jakoukoliv kombinaci

SPRÁVNÍ NÁKLADY V BRUTTOPOJISTNÉM JAKO FINANČNÍ TOKY zdroj: autor

Na jednotlivé správní náklady se pohlíží jako na jeden z typů finančních toků, které se realizují v daném pojistném produktu. Pracuje se zde s detailnější klasifikací správních nákladů včetně paušálních správních nákladů na jednu pojistku nezávislých na pojistné částce ani na pojistném, velmi často se realisticky počítá s inflačním navyšováním správních nákladů.

POJIŠTĚNÍ VÍCE ŽIVOTŮ zdroj: autor

Skupinové pojištění – např. zaměstnavatel hromadně pojistí více (všechny) zaměstnanců jednou smlouvou, nebo pojištění fotbalového utkání, nebo skupinové pojištění zájezdu

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Také pro dvojice: např. vdovský důchod,
dvojice; (x,y), kde x značí věk muže a y věk ženy
aproximace $l_{xy} \sim l_x l_y$ pro počet dvojic dožívajících se věků (x,y);

Pravděp. přežití ve věku (x,y):

$$p_{xy} = \frac{l_{x+1,y+1}}{l_{xy}} \approx \frac{l_{x+1} l_{y+1}}{l_x l_y} = p_x p_y$$

předpokládá ovšem nezávislé úmrtnostní chování mužů a žen.

Komutační čísla:

$$D_{xy} = l_{xy} v^{\frac{1}{2}(x+y)} = l_x l_y v^{\frac{1}{2}(x+y)}$$

$$C_{xy} = d_{xy} v^{\frac{1}{2}(x+y)} = (l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}) v^{\frac{1}{2}(x+y)}$$

Pojištění dvojice osob pro případ dožití zdroj: autor
Dvojice ve věku (x,y) se dožije věku (x+n,y+n),
Pojistná částka je vyplacena, pokud se obě osoby pojištěné ve věku (x,y) dožijí konce sjednané doby n

$${}_nE_{xy} = \frac{l_{x+n,y+n} v^n}{l_{xy}} = \frac{l_{x+n,y+n} v^{\frac{1}{2}(x+n+y+n)}}{l_{xy} v^{\frac{1}{2}(x+y)}} = \frac{D_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$$

Platí za oba dohromady, je < než individuální

Smíšené pojištění dvojic
Pojistná částka je vyplacena při 1.smrti v uvažované dvojici nejpozději po uplynutí času n

$$A_{xy:\overline{n}|} = \frac{M_{xy} - M_{x+n,y+n} + D_{x+n,y+n}}{D_{xy}} = 1 - d\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$$

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} = \frac{N_{xy} - N_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$$

Pojištění důchodu dvojice osob zdroj: autor

a) do první smrti = důchod je vyplácen pokud jsou obě osoby z uvažované dvojice naživu

$$\ddot{a}_{xy} = \frac{l_{xy} + l_{x+1,y+1} v + \ldots}{l_{xy}} = \frac{D_{xy} + D_{x+1,y+1} + \ldots}{D_{xy}} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}}$$

b) od 1. do 2.smrti (tzv. důchod pro přežívajícího) = důchod je vyplácen pokud je naživu právě 1 z uvažované dvojice

$$\ddot{a}_{xy}^{[1]} = \ddot{a}_{\overline{xy}} - \ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - 2\ddot{a}_{xy}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

c) do druhé smrti =důchod je vyplácen, je-li naživu aspoň 1 osoba z dvojice

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$$

d) Jednostranný důchod pro přežívajícího
= důchod je vyplácen po smrti 1.osoby 2.osobě z té dvojice

$\ddot{a}_{y/x} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$ => tzv. vdovský důchod

$\ddot{a}_{x/y} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy}$ =>tzv. vdovecký důchod

REZERVY POJIŠŤOVEN

Používá se přístup, že běžné pojistné je většinou konstantní, tzn. že v prvních letech pojištění platí klient více než je zapotřebí k pokrytí pojištěného rizika, ke konci pojištění platí méně než je zapotřebí k pokrytí rizika.

Z tohoto nesouladu vzniká rezerva pojistného životního pojištění = částka, kterou musí pojišťovna nashromáždit z přebytku prvních let pojištění a odpovídajících úroků, aby v pozdějších letech mohla plnit své závazky (tj. když pojištěný platí méně, než je zapotřebí k pokrytí ročního rizika) – jde o velmi kvalitní úvěrové peníze.

Rezerva:

- nettorezerva = uvedená rezerva bez zahrnutí správních nákladů,
- bruttorezerva =uvedená rezerva se zahrnutím správních nákladů

NETTOREZERVA *zdroj: autor*

pojištění se vstupním věkem x a pojistnou dobou n, které za roční nettopojistné ${}_nP_x$ placené vždy na začátku roku poskytuje:

- na konci t-tého roku (t=1,…,n); pojistné plnění ve výši a_t při dožití konce t-tého roku pojištění;
- pojistné plnění ve výši b_t při úmrtí během t-tého roku pojištění

${}_tV_x$ ...nettorezerva nashromážděná do konce t-tého roku pojištění (def.: ${}_0V_x$=0)

Rekurentní vzorec pro výpočet nettorezervy

$$({}_{t-1}V_x + {}_nP_x)l_{x+t-1}(1+i) - (a_t l_{x+t} + b_t d_{x+t-1}) = {}_tV_x l_{x+t}$$

$${}_tV_x = \frac{({}_{t-1}V_x + {}_nP_x)l_{x+t-1}(1+i) - (a_t l_{x+t} + b_t d_{x+t-1})}{l_{x+t}}$$

Rekurentně dosazujeme: ${}_0V_x$=0, dále ${}_1V_x$-> … -> ${}_nV_x$

Nerekurentní vzorec pro výpočet nettorezervy

-předešlou rovnici vynásobíme v^{x+t}, hodnoty nahradíme komutačními čísly a sečteme rovnice pro t=1,…,T =>
obecný vzorec pro výpočet nettorezervy -retrospektivní způsob

$$_{T}V_x = \frac{{}_nP_x \sum_{j=0}^{T-1} D_{x+j}}{D_{x+T}} - \frac{\sum_{j=1}^{T} (a_j D_{x+j} + b_j C_{x+j-1})}{D_{x+T}}$$

1.zlomek = příjmy do konce t-tého roku pojištění,
2.zlomek = výdaje do konce t-tého roku pojištění

prospektivní způsob:

$$_{T}V_x = \frac{\sum_{j=T+1}^{n} (a_j D_{x+j} + b_j C_{x+j-1})}{D_{x+T}} - \frac{{}_nP_x \sum_{j=T+1}^{n} D_{x+j-1}}{D_{x+T}}$$

1.zlomek = výdaje od konce t-tého roku (tj. počátku t+1. roku)
2.zlomek = příjmy od konce t-tého roku (tj. počátku t+1. roku)

Retrospektivní a prospektivní zp. dávají shodné výsledky
=>minulé příjmy – minulé výdaje = bud.výdaje – bud.příjmy

Obě strany rovnice kladné <-> zpočátku pojištění se vybírá více než je potřeba, proto minulé příjmy převyšují minulé výdaje, a opačně

- Pojišťovny - prospektivní způsob, preferuje se, lze rychle zohlednit budoucí změny, vede často ze zjednodušení vzorců, např. pokud se na počátku t+1. roku již neplatí pojistné

- Retrospektivní - odpovídá způsobu tvorby rezervy,pros. => Nettorezerva pro některé produkty

KALKULACE REZERVY
(na jednotkovou PČ (popř. jednotk.důchod))

1) při běžném pojistném
a) Pojištění pro případ dožití
pouze a_n=1, ostatní a_j a b_j =0 -> zjednodušení na tvar:

$$_tV_x = {}_{n-t}E_{x+t} - {}_nP_x \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \quad nebo \quad {}_tV_x = \frac{D_{x+n}(N_x - N_{x+t})}{D_{x+t}(N_x - N_{x+n})}$$

b) Pojištění pro případ smrti

$$_tV_x = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}$$

c) Dočasné pojištění pro případ smrti

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

$$ {}_tV_x = A^1{}_{x+t:\overline{n-t}} - {}_nP_x\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}} = \frac{M_{x+t}-M_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{D_{x+t}}.\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

d) Smíšené pojištění

$$ {}_tV_x = A_{x+t:\overline{n-t}} - {}_nP_x\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}} = 1 - \frac{D_x}{D_{x+t}}.\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

e) Pojištění s pevnou dobou výplaty

$$ {}_tV_x = v^{n-t} - {}_nP_x\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}} = v^{n-t} - v^n\frac{D_x}{D_{x+t}}.\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

f) Pojištění odloženého doživotního důchodu

$$ {}_tV_x = {}_{k-t/}\ddot{a}_{x+t} - {}_kP_x\ddot{a}_{x+t:\overline{k-t}} = \frac{N_{x+k}}{D_{x+t}}\frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+k}} $$

$$ ...t < k, tj.\ v\ době\ odkladu...{}_tV_x = \ddot{a}_{x+t} = \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} ...pro \quad t \geq k $$

2) při jednorázovém pojistném

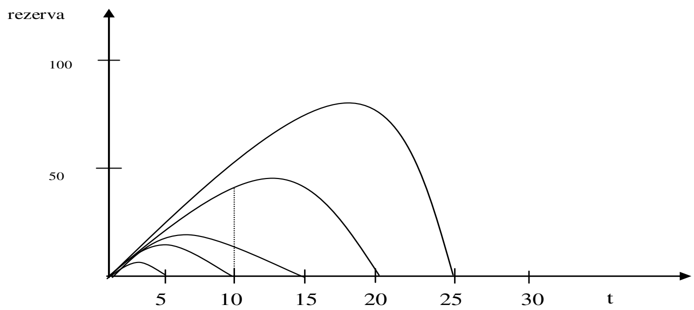
- v předchozích vzorcích se neodečítá člen obsahující běžné pojistné např. u smíšeného pojistného:

$$ {}_tV_x = A_{x+t:\overline{n-t}} = \frac{M_{x+t}-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+t}} $$

<u>Příklad:</u>

a) rezerva dočasného pojištění pro případ smrti: x=40, n=20, t=10, S=1000 Kč.

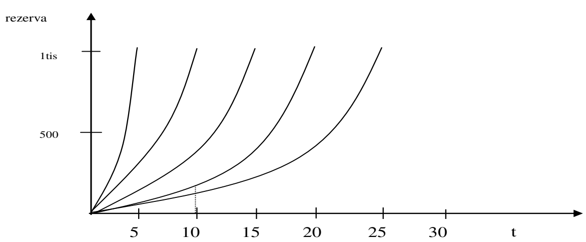
$$ 1000{}_{10}V_{40} = 1000(\frac{M_{50}-M_{60}}{D_{50}} - \frac{M_{40}-M_{60}}{D_{50}}.\frac{N_{50}-N_{60}}{N_{40}-N_{60}}) = 45{,}64Kč $$



zdroj: autor

b) smíšené pojištění – pro stejné hodnoty

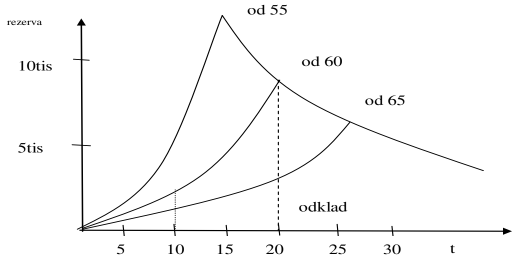
$$ 1000{}_{10}V_{40} = 1000(1 - \frac{D_{40}}{D_{50}}.\frac{N_{50}-N_{60}}{N_{40}-N_{60}}) = ... = 401{,}05Kč $$



zdroj: autor

c) pojištění odloženého doživotního důchodu – pro stejné hodnoty a roční důchod 1000Kč

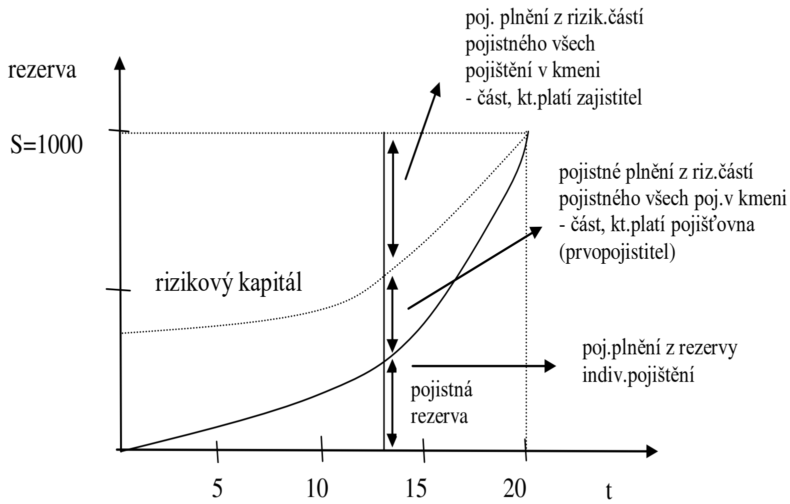
$$1000\,{}_{10}V_{40} = 1000\frac{N_{60}}{N_{50}}\cdot\frac{N_{40}-N_{50}}{N_{40}-N_{60}} = 3837{,}97\,Kč$$



zdroj: autor

Rezervotvorná pojištění (kapitálová) – se spořivou složkou -> vytváří rezervu pojistného ŽP (smíšené poj.nebo poj.důchodu)
Nerezervotvorná poj. – nevytváří rezervu vůbec nebo v zanedbatelné velikosti (např. dočasné pojištění pro případ smrti za běžné pojistné)

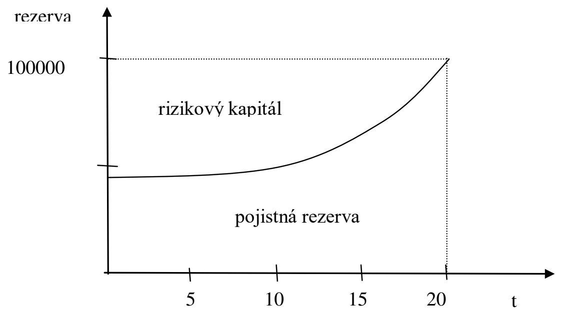
<u>Ukládací a riziková část pojistného</u> (u rezervotv.poj.)
např. u smíšeného pojištění
a) za běžné pojistné – poj. č. 100 000,- Kč, n=20let, pojistná událost ve 13. roce



Rizikový kapitál je předmětem zajištění.

zdroj: autor

Pojistná částka:
- pojistná rezerva -vytváří ji část pojistného (ukládací část)
- rizikový kapitál – průběžně se na něj odčerpává další část pojistného (riziková část pojistného), která globálně v celém kmeni pokryje pojistná plnění při úmrtí
b) za jednorázové pojistné



zdroj: autor

Ukládací část pojistného v čase t:

$$ {}_nP_x^{ukl}(t) = {}_tV_x.v - {}_{t-1}V_x $$

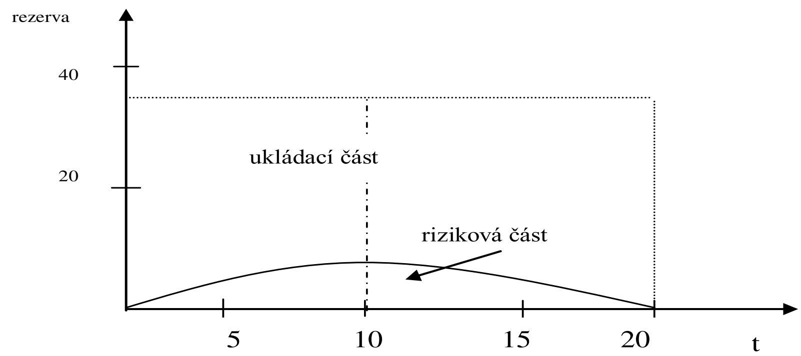
Riziková část pojistného v čase t:

$$ {}_nP_x^{riz}(t) = \frac{a_t D_{x+t} + (b_t - {}_tV_x)C_{x+t-1}}{D_{x+t-1}} = {}_nP_x - {}_nP_x^{ukl}(t) $$

Příklad:
Smíšené pojištění: x=40, n=20, t=10, S=1000,- Kč

$$ {}_{20}P_{40}^{ukl}(10) = {}_{10}V_{40}.v - {}_9V_{40} = \ldots = 31{,}11 K\check{c} $$

$$ {}_{20}P_{40}^{riz}(10) = {}_{20}P_{40} - {}_{20}P_{40}^{ukl}(10) = 36{,}62 - 31{,}11 = 5{,}51 K\check{c} $$



zdroj: autor

BRUTTOREZERVA

${}_tV_x^{brutto}$= nettorezerva ${}_tV_x$ zohledňující správní náklady

1) **Smíšené pojištění**
pro běžné pojistné:

$$ {}_tV_x^{brutto} = A_{x+t:\overline{n-t}|} + \beta \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + \gamma_n B_x \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_n B_x \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = \ldots $$

$$ = {}_tV_x - \alpha \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} $$

pro jednorázové pojistné

$$ {}_tV_x^{brutto} = {}_tV_x + \beta_1 a_{x+t:\overline{n-t}|} $$

2) **Pojištění pro případ smrti**
Běžné pojistné

$$ {}_tV_x^{brutto} = {}_tV_x - \alpha \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} $$

Jednorázové pojistné

$$ {}_tV_x^{brutto} = {}_tV_x + \beta_1 \ddot{a}_{x+t} $$

=>obecné pravidlo pro tvorbu bruttorezervy z nettorezervy – při běžném pojistném se odečte člen

$\alpha \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$ nebo $\alpha \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}$

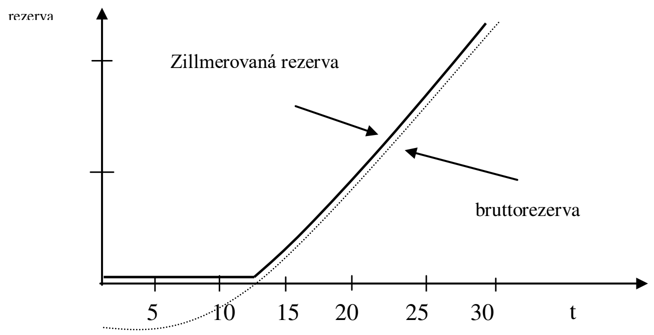
<u>Zillmerování rezerv</u>

Běžné pojistné:- počáteční náklady α pojišťovna vynaloží při uzavření pojištění a dostane je zpět od klienta až ve splátkách bruttopojistného-> pojišťovna se stává věřitelem pojistníka

- při předčasném zrušení pojištění by pojišťovna dlužnou částku nedostala zpět
- Zillmer navrhl: snížit rezervu pojistného („konto pojistného“) v daném čase vždy o neměnnou část počátečních nákladů $\alpha \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}$ (tj. výpočet neumořené části v čase t)
- u dlouhých pojistných dob někdy na začátku může být příslušný rozdíl ${}_tV_x - \alpha \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}$ záporný
- podle právní úpravy je nutné záporné hodnoty nahradit 0:

$$ {}_tV_x^z = {}_tV_x - \alpha \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} \quad nebo \quad {}_tV_x - \alpha \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} $$

$$ {}_tV_x^z = 0 \Leftrightarrow {}_tV_x^{brutto} \prec 0 $$



zdroj: autor

Jednorázové pojistné:

přičte se člen $\beta_1 \ddot{a}_{x+t} \quad nebo \quad \beta_1 \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}}$

$$ \Rightarrow {}_tV_x^S = \beta_1 \ddot{a}_{x+t} \quad nebo \quad \beta_1 \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}} $$

= rezerva běžných správních nákladů

Na bázi rezerv je možné počítat i další případy

Odbytné (odkup)
= pouze u rezervotvorných pojištění se v případě zrušení pojištění pojistníkem, pokud ještě nedošlo k pojistnému plnění, vrací podstatná část ${}_tO_x$ bruttorezervy nashromážděné do daného okamžiku
- nevrátí celou bruttorezervu, strhává se tzv. storno poplatek - z rezervy, je obvykle dána jako % z rezervy a s dobou trvání pojištění klesá

Redukce při neplacení pojistného zdroj: autor
= u rezervotvorných pojištění při neplacení pojistného pojišťovna pojištění neruší, pokračuje dále, ale při redukci jednotlivých hodnot

Redukce PČ nebo důchodu
-pojištění trvá do konce původní pojistné doby, ale při redukované PČ nebo důchodu;

redukovaná PČ se vypočte:
$${}_tR_x = \frac{{}_tO_x}{A_{x+t:\overline{n-t}|} + \beta_1 \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$$

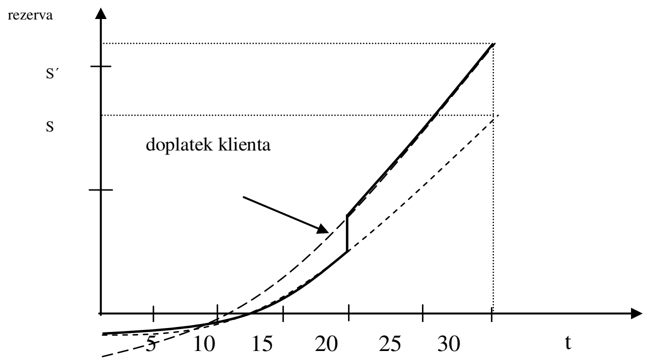
Změny v pojistných hodnotách zdroj: autor
- změny během pojištění na přání pojistníka nebo na základě návrhu pojišťovny podléhající schválení pojistníkem
1) Zvyšování běžného pojistného
- nabízí často pojišťovna ve výši každoroční inflace, výpočet nové (vyšší) PČ S´ (S->S´)

$$S' = S + \frac{p}{100} \cdot \frac{B}{{}_{n-t}B_{x+t}}$$

kde S´...nová PČ při zvýšení pojistného v t+1.roce o p%
S...původní částka, kt. odpovídá roční bruttopojistné B
${}_{n-t}B_{x+t}$...bruttopojistné na jednotkovou PČ v pojištění uvažovaného typu uzavřeného ve věku x+t po zbylou pojistnou dobu n-t

2) Zvýšení PČ
S->S´ (S´>S) v čase t, Různé přístupy pojišťovny:
a) doplacení rezervy pojistného pojistníkem - v okamžiku změny se navýší bruttopojistné a doplatí se bruttorezerva, dojde ke zvýšení bruttopojistného od roku t+1:
B'=S'nBx

a doplatek bruttorezervy ve výši
$$(S' - S)\frac{{}_tV_x^{brutto} + \alpha}{1-\gamma}$$
obě tyto změny proběhnou současně

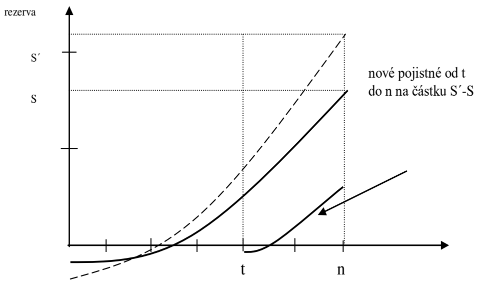


zdroj: autor

b) uzavření dodatečného pojištění

- v okamžiku změny se fiktivně uzavře dodatečné pojištění na pojistnou částku S-S´- při změně dojde jen ke zvýšení bruttopojistného (není skokové navyšování rezervy)

B‘=SnBx+(S‘-S).n-tBx+t



zdroj: autor

Podíl na zisku

Zdroje podílu na zisku= rozdíly mezi skutečnou a kalkulovanou výší výpočetních podkladů

	Kalkul.výp.podklady	Skutečné výp.podklady	Zdroj zisku
úrok	i (poj.-tech. úr. míra)	i´ (efektivní úroková míra)	i´>i
úmrtnost	qx (tabulková hodnota)	qx´ (skutečná hodnota)	qx>qx´ u rizikových poj., qx<qx´ u důchodových poj
správní náklady	α, β, γ,…	α´, β´, γ´,…	α>α´, β>β´, γ>γ´

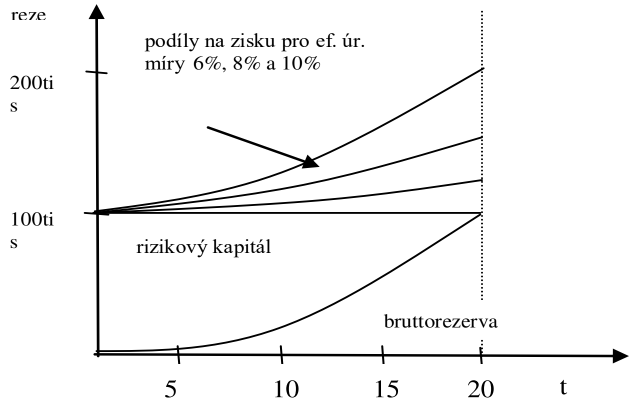
zdroj: autor

Hlavní zdroj zisku v praxi je to, že pojistně-technická úroková míra je nižší než efektivní úroková míra

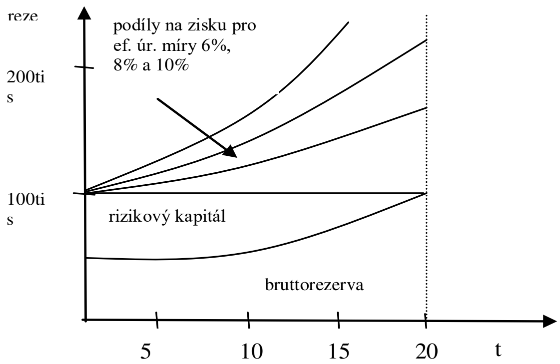
=>zt – zisk na jednotku PČ v t-tém roce pojištění: $z_t = (i' - i)\dfrac{{}_{t-1}V_x^{brutto} + {}_{t}V_x^{brutto}}{2}.k$

k...koef., podíl na zisku (85-90%)

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



zdroj: autor



zdroj: autor

Formy výplaty podílu na zisku

- každoroční přímá výplata pojistníkovi,
- sleva na pojistném odpovídající podílu na zisku z předchozího období,
- zvláštní prémie doplňující pojistné plnění (v ČR nejčastější)
- spoření ve prospěch pojistníka,
- zkrácení pojistné doby (neobvyklé),
- uzavření dalšího pojištění s pojistným placeným právě z podílů na zisku – buď stejného typu jako základní nebo jiný produkt

Při výpočtech v životním pojištění se využívá kombinace finanční matematiky a matematického modelování úmrtnosti. Je tomu tak proto, že pojistnou událostí v rámci pojištění osob je úmrtí nebo dožití se určitého věku.
Úmrtnost lze charakterizovat:

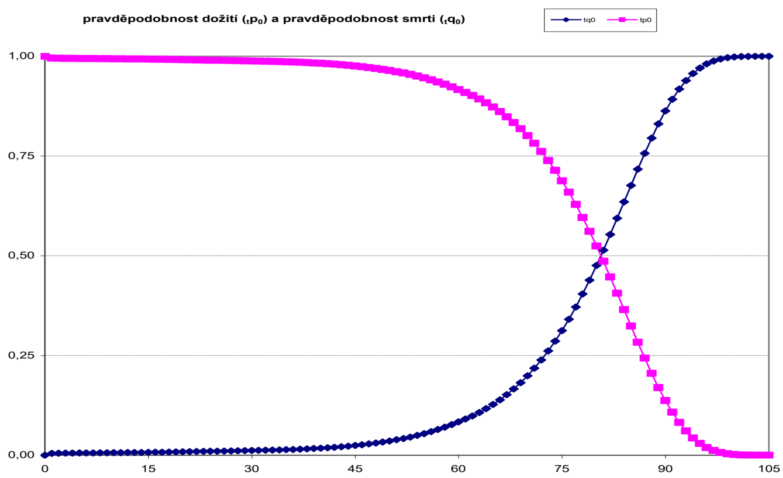
- pojištěný může být v právě jednom ze stavů: naživu či zemřelý, přičemž je naprosto zřejmé, který stav to je
- změna stavu je možná jen ze „naživu“ do „zemřelý
- okamžik úmrtí je náhodný a je ho možné popsat počtem pravděpodobnosti

délka života ve věku 0 (time until death for x = 0): T_0

- délka života právě narozeného dítěte
- je to náhodná veličina, která se měří v rocích, ale může nabývat i neceločíselných hodnot

distribuční funkce (distribution function)
platí: $F_0(t) = \Pr[T_0 \le t] = {}_t q_0$ znamená pravděpodobnost, že právě narozené dítě zemře před dosažením nebo ve věku t (pozn. T_0 je veličina spojitá, proto je lhostejno $\Pr[T_0 \le t] = \Pr[T_0 < t]$

funkce přežití (survival function)
je opak k distribuční funkci, tj. znamená pravděpodobnost, že právě narozené dítě se dožije věku t. $S_0(t) = 1 - F_0(t) = \Pr[T_0 > t] = {}_t p_0$
platí: $\lim\limits_{t \to \infty} F_0(t) = 1$ a $\lim\limits_{t \to \infty} S_0(t) = 0$, protože při $t \to \infty$ jsou všichni mrtvi a nikdo nezůstane naživu



zdroj: autor a český statistický úřad

délka života ve věku x (time until death for x = 0): T_x

- budoucí délka života ve věku x, tj. jedinec se již dožil věku x

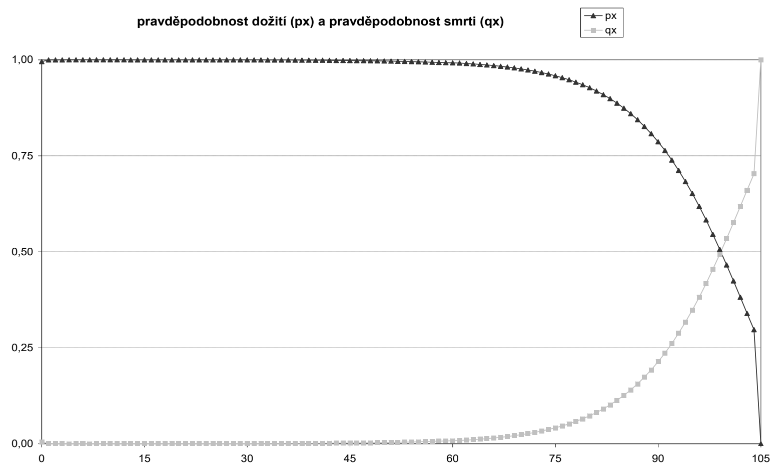
distribuční funkce (distribution function) *zdroj: autor*

$$F_x(t) = \Pr[T_x \le t] = \Pr[T_0 \le x+t | T_0 > x] = \frac{\Pr[x \le T_0 \le x+t]}{\Pr[T_0 > x]} = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} = {}_t q_x$$ tato funkce vyjadřuje pravděpodobnost, že jedinec ve věku x zemře před dosažením věku x+t. Upravili jsme distribuční funkci tak, že hledáme pravděpodobnost dožití se věku x+t za podmínky, že se jedinec už dožil věku x. (Jedná se o podmíněnou pravděpodobnost, takže nemůžeme jednoduše napsat $T_x = T_0 - x$).

zdroj: autor

funkce přežití (survival function)

$$S_x(t) = \Pr[T_x > t] = \Pr[T_0 > x+t | T_0 > x] = \frac{\Pr[T_0 > x+t]}{\Pr[T_0 > x]} = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)} = {}_t p_x = 1 - {}_t q_x$$



zdroj: autor a český statistický úřad

dále zavedeme:

${}_{s|} q_x = F_x(s+1) - F_x(s) = \Pr[s < T_x \le s+1]$ jedinec ve věku x se dožije věku x+s, ale zemře před dosažením věku x+s+1

${}_{s|t} q_x = F_x(s+t) - F_{x_x}(s) = \Pr[s < T_x \le s+t]$ jedinec ve věku x se dožije věku x+s, ale zemře před dosažením věku x+s+t

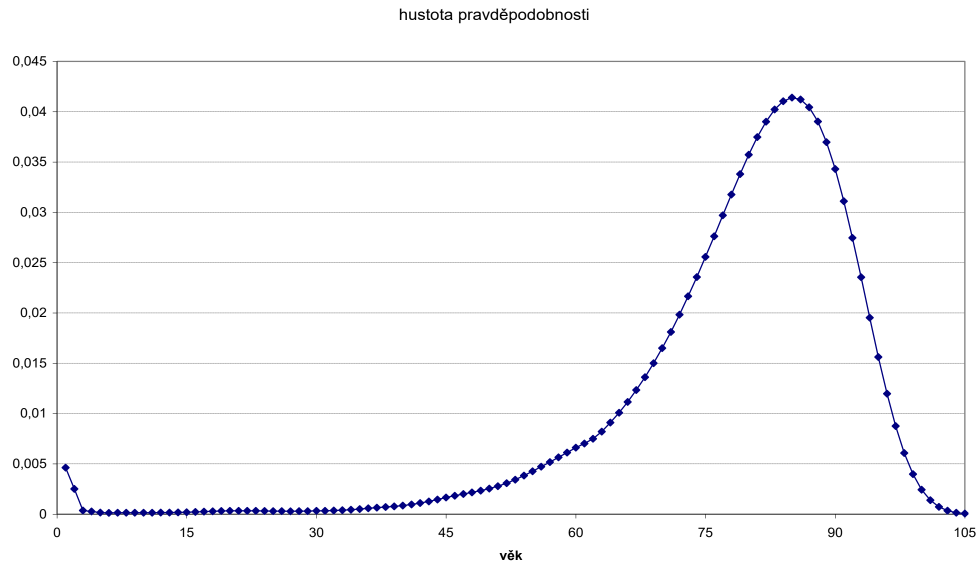
hustota pravděpodobnosti (probability density function):

zdroj: autor

pro věk 0: $f_0(t) = \dfrac{dF_0(t)}{dt} = -\dfrac{d\,{}_t p_0}{d}$

pro věk x: $f_x(t) = \dfrac{dF_x(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} = -\dfrac{d}{dt}\dfrac{{}_{x+t}p_0}{{}_x p_0} = -\dfrac{d}{dt}\,{}_t p_x = -\dfrac{dS_x(t)}{dt}$

platí vztah (pro malé přírůstky x: $f_0(x) \cdot \Delta x = F_0(x + \Delta x) - F_0(x) = \Pr[x < T_0 < x + \Delta x]$



zdroj: český statistický úřad

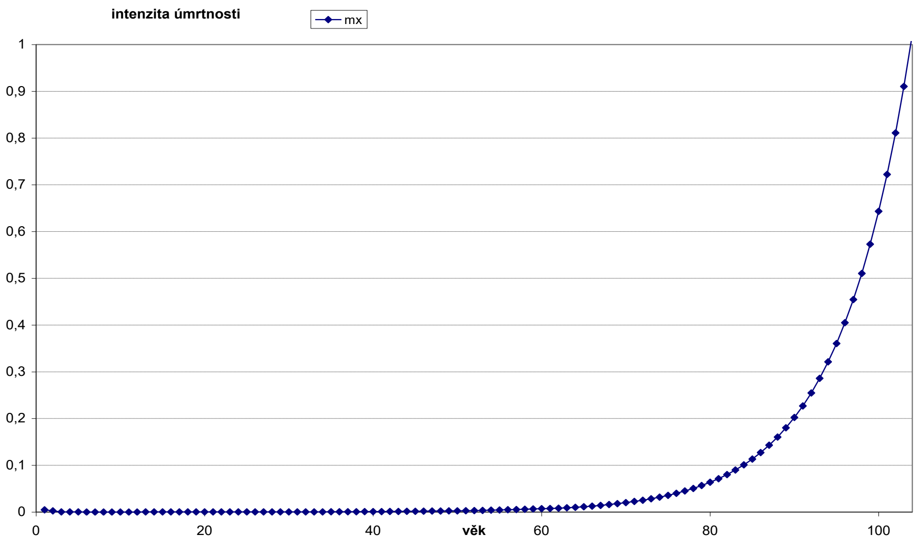
intenzita úmrtnosti (force of mortality):

zdroj: autor

$$\mu_x = \frac{f_0(x)}{1-F_0(x)} = -\frac{S_0'(x)}{S_0(x)} = -\frac{d}{dx}\log\left[S_0(x)\right] = -\frac{1}{{}_xp_0}\cdot\frac{d}{dx}{}_xp_0 = \frac{1}{{}_xp_0}\cdot\frac{d}{dx}{}_xq_0$$

$$\mu_x \cdot \Delta x = \Pr\left[x < T_0 < x+\Delta x \middle| T_0 > x\right]$$

interpretace tohoto vztahu je: pravděpodobnost, že jedinec zemře v malém věkovém intervalu: <x;x+Δx>, za podínky dožití se věku x



pomocí veličiny intenzity úmrtnosti můžeme definovat:

zdroj: český statistický úřad

$$f_x(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

$${}_t q_x = \int_0^t {}_s p_x \mu_{x+s} ds$$

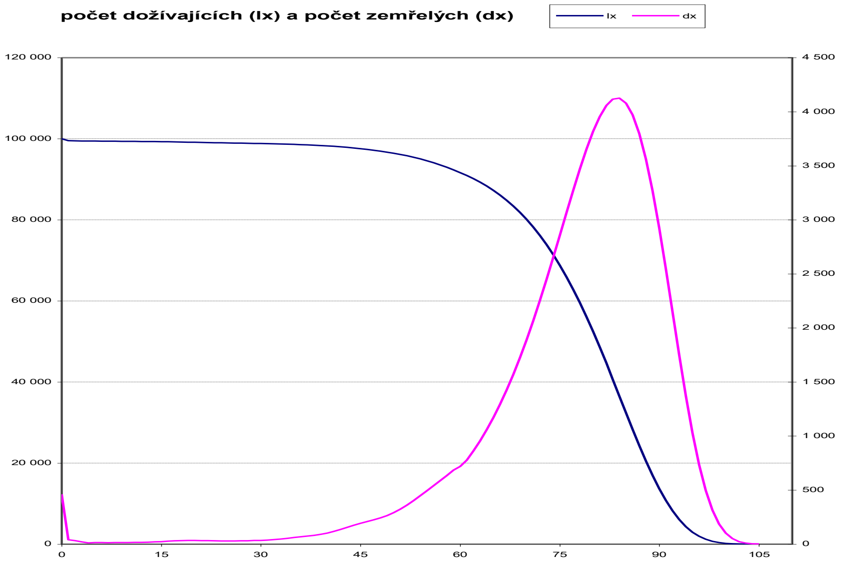
$${}_t p_x = \exp(-\int_0^t \mu_{x+s} ds) \qquad {}_\infty p_x = \exp\left[-\int_0^\infty \mu(x+s)ds\right] = 0 \text{ pak } \int_0^\infty \mu(x+s)ds = \infty$$

$$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^\infty t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty t \cdot f_x(t) dt = \left[-t \cdot {}_t p_x\right]_0^\infty - \int_0^\infty - {}_t p_x dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt$$

$$\text{var}(T_x) = \int_0^\infty t^2 \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt - (\int_0^\infty t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt)^2 = \int_0^\infty 2t \cdot {}_t p_x dt - (\int_0^\infty {}_t p_x dt)^2$$

Značení v úmrtnostních tabulkách (Life table notation):

počet zemřelých ve věku x *(tj. po dosažení věku x před dosažením věku x+1):* $\boldsymbol{d_x}$
počet přežívajících *z věku x do věku x+1*: $\boldsymbol{l_x}$



platí již dříve uvedené vztahy:

zdroj: český statistický úřad

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad , \qquad l_{x+1} = l_x - d_x$$

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n} = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots d_{x+n-1} = \int_0^n l_{x+t} \mu_{x+t} dt$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \; q_x = \frac{d_x}{l_x}, \; {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \; {}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x}$$

$${}_{k|} q_x = \frac{d_{x+k}}{l_x}, \; {}_{k|n} q_x = \frac{{}_n d_{x+k}}{l_x} = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+n}}{l_x}$$

$$S_0(x) = \frac{l_x}{l_0}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

$$l_{x+n} = l_x \cdot \exp\left[-\int_0^n \mu_{x+t}\,dt\right] = l_x \cdot {}_n p_x \quad , \mu_x = -\frac{\frac{d}{dx} l_x}{l_x} \quad , \quad \frac{d^2}{dx^2} l_x = -\frac{d}{dx} l_x \mu_x$$

$$\frac{d}{dt} {}_t p_x = -{}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \quad , \quad \frac{d}{dx} {}_t p_x = -{}_t p_x \cdot [\mu_x - \mu_{x+t}]$$

počet let prožitých jedinci ve věku x L_x zdroj: autor

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\,dt = l_{x+1} + \int_0^1 t \cdot l_{x+t} \mu_{x+t}\,dt \approx l_{x+1} + \frac{1}{2} q_x l_x = l_{x+1} + \frac{1}{2} d_x$$

pro věk 0 používáme jiné rozdělení úmrtnosti, protože většina dětí právě narozených umírá na samém počátku svého života takže platí: $L_x = \alpha . l_{x+1} + (1-\alpha) d_x$ kde α odhadujeme asi na 0,9

očekávaná délka života (expected value of T_x): zdroj: autor

$E(T_x) = {}^\circ e_x = \int_0^\infty t \cdot {}_t p_x \mu_{x+t}\,dt = \int_0^\infty {}_t p_x\,dt$ integrovali jsme metodou per partes

rozptyl T_x (variance of T_x):

$$Var(T_x) = E\left[(T_x)^2\right] - [E(T_x)]^2 = E\left[(T_x)^2\right] - ({}^\circ e_x)^2$$

$$E\left[(T_x)^2\right] = \int_0^\infty t^2 \cdot {}_t p_x \mu_{x+t}\,dt = \int_0^\infty 2t \cdot {}_t p_x\,dt$$

zdroj: autor

očekávaná délka života pro následujících n-let (n-year temporary complete expectation of life for x):

ukazuje průměrný počet odžitých let populací ve věku x u období mezi léty x a x+n

$${}^\circ e_{x:\overline{n}|} = \int_0^n {}_t p_x\,dt = n \cdot {}_n p_x + \int_0^n t \cdot {}_t p_x \mu(x+t)\,dt$$

$${}^\circ e_x = {}^\circ e_{x:\overline{n}|} + {}_n p_x \, {}^\circ e_{x+n} \quad , \quad {}^\circ e_x = \int_0^1 {}_t p_x\,dt + p_x \, {}^\circ e_{x+1}$$

medián budoucí délky života ve věku x (median future lifetime of x):

medián T_x označme m_x pro které platí: zdroj: autor

$${}_{m_x} p_x = \Pr[T_x > m_x] = 0{,}5$$

$$l_{x+m_x} = \frac{1}{2} l_x$$

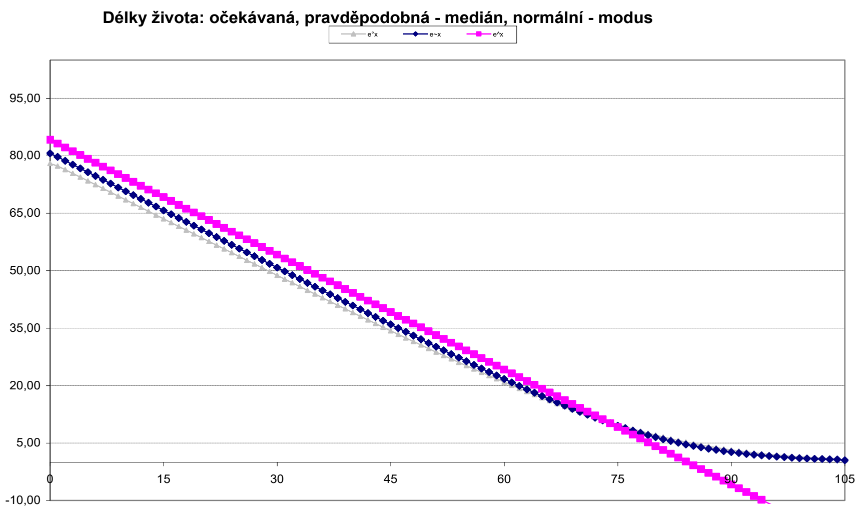
vedle mediánu, který představuje 50% kvantil můžeme konstruovat i jiné kvantily

př. k-% kvantil ${}_{c_k} p_x = \Pr[T_x > c_k] = 1 - 0.01k$, kde c_k je hledané T_x

modus T_x (mode of T_x):

definujeme jako maximum funkce hustoty pravděpodobnosti $f_x(t)$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



zdroj: český statistický úřad

Pro modelaci úmrtnosti využívá pojistná matematika různých zákonů úmrtnosti. Ve skutečnosti to znamená, že úmrtnost modelujeme pomocí určitých vzorců. Tyto modely se také používají pro úpravu praktických údajů o úmrtnosti (úmrtnostní tabulky).

1. Konstantní intenzita úmrtnosti (konstant force of mortality for all x):

tj. $\mu_x = \lambda = \text{konstanta}$

z toho pak plyne: ${}_t p_x = e^{-\lambda t}$ to znamená, že pravděpodobnost dožití je stejná pro všechny věky, tudíž že je nezávislá na věku

$$f_{xa}(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} = e^{-t\lambda}\lambda$$

pak: $\overset{\circ}{e}_x = \dfrac{1}{\lambda}$ $\quad \operatorname{var}(T_x) = \dfrac{1}{\mu^2}$ zdroj: autor

tento model se však pro modelování lidského života moc nehodí, protože, jak je vidět z modelu, funkce přežití je nezávislá na věku, což je nevhodné.

2. Moivrův zákon (Moivre's Law): zdroj: autor

platí:

$f_x(t) = \dfrac{1}{\omega - x}$ $\quad 0 < t < \omega - x$ kde ω je maximální věk, kterého se jedinec může dožít

$l_x = k(\omega - x)$ pro $0 \le x \le \omega$

${}_t p_x = \dfrac{\omega - x - t}{\omega - x}$ pro $0 \le t \le \omega - x$

$S_0(x) = 1 - \dfrac{x}{\omega}$ pro $0 \le x \le \omega$

$\mu_x = \dfrac{1}{\omega - x}$ pro $0 \le x \le \omega$

dále pak platí:

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

$$_{n}p_{x} = 1 - \frac{n}{\omega - x} \;, \quad _{n}q_{x} = \frac{n}{\omega - x} \qquad pro\ 0 \le n \le \omega\text{-}x$$

$$_{k|}q_{x} = \frac{1}{\omega - x} \quad pro\ 0 \le k \le \omega\text{-}x\text{-}1$$

$$\overset{\circ}{e}_{x} = \frac{\omega - x}{2}$$

$$Var(T_{x}) = \frac{(\omega - x)^{2}}{12}$$

jedná se o hyperbolicky rostoucí funkci úmrtnosti.

3. **Zobecnělý Moivrův zákon (generalized Moivre`s Law):** zdroj: autor

$l_{x} = k(\omega - x)^{\alpha}$ pro $0 \le x \le \omega$, kde ω je nejvyšší dožitelný věk a $\alpha > 0$

$$S_{0}(x) = (1 - \frac{x}{\omega})^{\alpha} \quad \text{pro } 0 \le x \le \omega$$

$$\mu_{x} = \frac{\alpha}{\omega - x} \qquad \text{pro } 0 \le x \le \omega$$

dále platí

$$_{n}p_{x} = (1 - \frac{n}{\omega - x})^{\alpha} \;,$$

$$f_{x}(t) = (\frac{\alpha}{\omega - x})(1 - \frac{t}{\omega - x})^{\alpha - 1}$$

$$\overset{\circ}{e}_{x} = \frac{\omega - x}{\alpha + 1}$$

$$Var(T_{x}) = \frac{\alpha(\omega - x)^{2}}{(\alpha + 1)^{2}(\alpha + 2)}$$

4. **Gompertz-Makehamův zákon úmrtnosti (Gompertz-Makeham`s mortality law):**

výchozí byl Gompertzův model úmrtnosti daný exponenciálně rostoucí intenzitou úmrtnosti: zdroj: autor

$\mu_{x} = B \cdot c^{x}$ kde B, c jsou parametry >0

a $_{t}p_{x} = \exp\left[-\int_{0}^{t}\mu_{x+s}ds\right] = \exp\left[-B\frac{1}{\ln c}c^{x}(c^{t} - 1)\right]$ jak je vidět pravděpodobnostní funkce dožití zde závisí na věku (s rostoucím věkem jedinec rychleji ztrácí schopnost dožít se dalšího roku.

Makehamův model doplnil tuto funkci o parametr A, který v podstatě znamená snížení pravděpodobnosti dožití o faktor nezávislý na věku (tj. nešťastná náhoda...)

pak: $\mu_{x} = A + B \cdot c^{x}$

$$_{t}p_{x} = \exp\left[-\int_{0}^{t}\mu_{x+s}ds\right] = \exp\left[-At - B\frac{1}{\ln c}c^{x}(c^{t} - 1)\right]$$

5. Vyrovnání pomocí klouzavého průměru

toto vyrovnání se používá k odstranění výrazných odchylek vlivem nějaké vnější události (nesouvisející s věkem)

PRAKTICKÁ KONSTRUKCE ÚMRTNOSTNÍCH TABULEK

Za použití výše uvedených vztahů můžeme konstruovat úmrtnostní tabulky, které se snaží věrohodně modelovat zákonitosti úmrtnosti praktickým způsobem.
Úmrtnostní tabulky se konstruují jako závislost úmrtnosti na jednotlivých věcích, rozlišují se tabulky pro muže a ženy, někdy se může zohlednit i zvýšená úmrtnost pro kuřáky. Protože je empiricky prokázáno: úmrtnost je vyšší pro: vyšší věky, muže, kuřáky.
Zpravidla se konstruují úplné úmrtnostní tabulky, které tedy obsahují všechny celočíselné věky x, tj. $x = 0,1,...,\omega$, ale můžeme vidět i zkrácené úmrtnostní tabulky, kde zkoumáme úmrtnosti za určité věkové intervaly (zpravidla pětileté, ale vždy s výjimkou prvního intervalu, který se dělí na dokončený věk 0 a na čtyřletý interval 1-4 roky dokončeného věku).
Dále se používají také selekční úmrtnostní tabulky. Ty jsou v určitém smyslu dvojrozměrné, protože rozlišují: q_x a $q_{[x-t]+t}$ kde $q_{[x]}$ znamená pravděpodobnost úmrtní s tím, že ve věku x byla provedena lékařská prohlídka tj $q_{[x-t]+t}$ znamená, že ve věku x uplynulo t období od lékařské prohlídky. Platí: $q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < ... < q_{[x-r]+r} = ...$ r je dostatečně dlouhá doba, aby zaniknul selektivní vliv lékařské prohlídky.

Zdroje dat pro úmrtnostní tabulku:
internet: *popin.natur.cuni.cz* - platí pro ČR, pro SR*: infostat.sk/slovakpopin*
statistický úřad – statistické ročenky, (případně na stránce Českého statistického úřadu)

Pro případnou konstrukci úmrtnostní tabulku v České republice potřebujeme informace:

- počty zemřelých v ČR podle věků (mortality deaths by age)
- počty žijících na území ČR v daném – průměrný stav žijících aproximujeme stavem ke středu období tj. k 1.7. (age structure as of 1.July)
- počty žen narozených v ČR – za daný rok a rok předchozí a provedeme vážený průměr, abychom získali počet osob ve věku 0

postup:
Získali jsme informace o počtech zemřelých (M_t) a středních stavech žijících (S_t) pro jednotlivé věky t, takže nebude problém spočítat míru úmrtnosti (m_t) pro věky t .
Platí: $m_t = \dfrac{M_t}{S_t}$ tyto míry úmrtnosti jsou ryze empirické hodnoty, které mohou vlivem vnějších zásahů v jednotlivých letech kolísat. Označme je $\tilde{m}_t$. Tyto hodnoty budeme vyrovnávat, abychom odstranili kolísání. Pro věk nula vyrovnávat nebudeme, protože se jedná o naprosto výjimečný případ, pro věk 1 použijeme $\tilde{m}_1$, pro věky 2-4 užijeme 3hodnotový klouzavý průměr $m_x(3)$,pro věky 6-29 9hodnotový klouzavý průměr, pro věky 31-59 19hodnotový klouzavý průměr a pro nejvyšší věky 61-ω použijeme Gompertz-Makehamovo vyrovnání. Pro hodnoty mezi jednotlivými intervaly vyrovnávání použijeme aritmetický průměr obou způsobů, tj. př. pro věk 5 50%hodnoty 3hodnotového aritmetického průměru a 50%hodnoty 9hodnotového aritmetického průměru.
Teď již máme k dispozici údaje, které potřebujeme k vlastní konstrukci úmrtnostních tabulek. Nejdříve určíme pravděpodobnosti dožití se následujícího roku tj.p_x a pravděpodobnosti smrti před dosažením následujícího roku tj. q_x.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Platí: $p_x = \exp(-m_x)$ kde budeme používat vyrovnané míry úmrtnosti a pak $q_x = 1 - p_x$, pro věk 0 použijeme jiný vztah a to: $\frac{M_0}{\alpha S_{1998} + (1-\alpha)S_{1997}} = q_0$ protože dětí umírají spíš těsně po svém narození, odhadujeme α = 0,9 a p_0 je opět doplněk do jedné.
Dále spočítáme počty dožívajících se l_x a počty zemřelých d_x , počet prožitých let L_x, počet zbývajících let života T_x (pozor nejedná se o stejnou veličinu jako délka života zmiňovaná výše) a různé délky života (očekávaná, pravděpodobná a normální).
Pro nově definované T_x platí $T_x = L_x + L_{x+1} + ...L_\omega$ pak můžeme nově definovat také očekávanou délku života $e_x = \frac{T_x}{l_x}$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Zdroje:

CIPRA, T. *Finanční a pojistné vzorce.* Praha: Grada, 2006. ISBN 80-247-1633-X.

CIPRA, T. *Pojistná matematika - teorie a praxe.* 2. vyd. Praha: Ekopress, 2006. 411 s. ISBN 80-86929-11-6.

CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou.* Praha: Ekopress, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.

MACHÁČEK, O. *Finanční a pojistná matematika : úrok a úročení, modely opakovaných plateb, burzovní operace při složeném úročení, pojistné operace.* Praha: Prospektrum, 2001. ISBN 80-7175-104-9

RADOVÁ, J. *1BP305 Pojistná matematika (e-learningová podpora).* 1. vyd. Praha: Nakladatelství Oeconomica, 2009. ISBN 978-80-245-1503-8.

WALTER, J. -- ČERMÁKOVÁ, A. -- WALTEROVÁ, L. *Pojistná matematika (cvičení).* 1. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 1997. 50 s.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY