Finanční matematika

Téma: Důchody

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Důchody

- Definice: Důchodem se rozumí pravidelné platby ve stejné výši, tzv. anuity
- Pozor na nejednotnost terminologie
- Různé možnosti rozdělení důchodů

Členění důchodů

dle okamžiku vyplacení jednotlivé platby:

- předlhůtní
- polhůtní

dle délky doby vyplacení důchodů:

- dočasný
- věčný

dle toho, kdy se začínají vyplácet důchody:

- bezprostřední
- odložený

Výpočty u důchodu

- Současná hodnota důchodu D
- Budoucí hodnota důchodu (spoření) S
- Vztah mezi současnou a budoucí hodnotou důchodu:

$$S = D.(1 + i)^{n}$$

Kde *S* je budoucí hodnota důchodu;
D je současná hodnota důchodu;
i je úroková sazba úrokové období
n je počet úrokových období

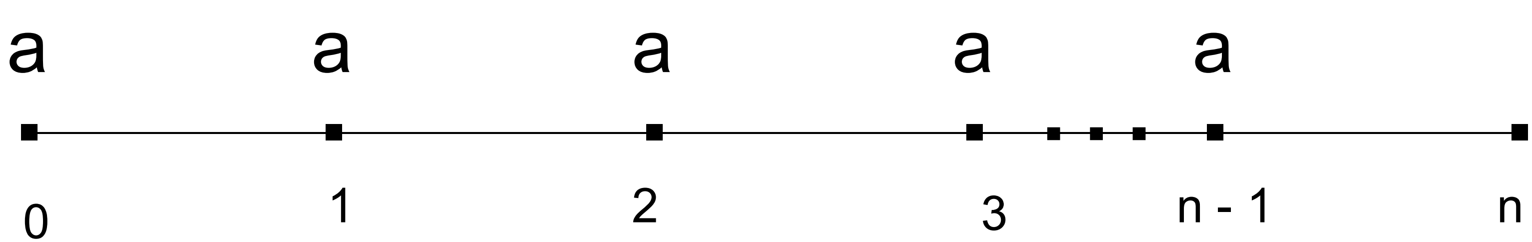
Důchod bezprostřední

- Výplata začíná okamžitě bez prodlení
- 2 druhy
  - předlhůtní
  - polhůtní

Důchod bezprostřední předlhůtní

- – na počátku každého období důchod *a*
- – po *n* období
- – při úrokové sazbě *i*.

- Současná hodnota D - součet současných hodnot všech plateb



Výplata číslo	Současná hodnota
1	$a/(1 + i)^0$
2	$a/(1 + i)^1$
3	$a/(1 + i)^2$
…	…
n	$a/(1 + i)^{n - 1}$

Zdroj: Autor

D’

= a.[(1 +(1 + i)$^{-1}$ + (1 + i)$^{-2}$ + ⋯ + (1 + i)$^{-(n-1)}$]

Diskontní faktor označíme *v*

$$D = a \cdot (1 + i) \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

Výraz $a_n' = (1 + i) . \dfrac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$ se nazývá

zásobitel předlhůtní, udává současnou hodnotu důchodu n jednotkových výplat, které jsou vyplaceny na počátku n období při úrokové sazbě i.

Výraz $(1 + i)^{-1}$ se taky nazývá diskontní faktor

Důchod bezprostřední polhůtní

- Nechť se bude dostávat na konci každého období důchod ve výši *a* po *n* období při úrokové sazbě *i*. Počáteční hodnota D je součet současných hodnot všech plateb vztažených k počátku

Výplata číslo	Současná hodnota
1	$a/(1 + i)^1$
2	$a/(1 + i)^2$
3	$a/(1 + i)^3$
…	…
n	$a/(1 + i)^n$

Zdroj: Autor

D =

= $a.[(1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + (1 + i)^{-3} + \cdots + (1 + i)^{-n}]$

Výraz v hranatých závorkách je konečná geometrická řada

Současnou hodnotu polhůtní anuity

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

- Výraz $a_n = (1 – (1 + i)^{-n})/i$ se nazývá zásobitel polhůtní

Platí také tyto vztahy:

$$D' = D.(1 + i)$$

$$S = D.(1 + i)^n$$

$$a'_n = a_n.(1 + i)$$

$$s_n = a_n.(1 + i)^n$$

- Příklad :

Jakou částku je třeba mít k dispozici teď, aby bylo možné pokrýt každoroční výdaje ve výši 45 000 Kč po dobu 5 let? Tyto výdaje budou vynaloženy hned na počátku každého roku. Úrokovou sazbu předpokládejme 5% p.a..

Řešení:

$$D = 45000.1{,}05.(1 – 1{,}05^{-5})/0{,}05$$

$$= 205199{,}40 \text{ Kč}$$

- Příklad:

Jaká je současná hodnota všech každoročních plateb ve výši 1500 000 Kč vydaných vždy na konci roku po dobu 5 let? Předpokládejme opět úrokovou míru ve výši 5% p.a..

(Cena provizorní budovy, která má čistý roční výnos a na konci 5. roku musí být odstraněna)

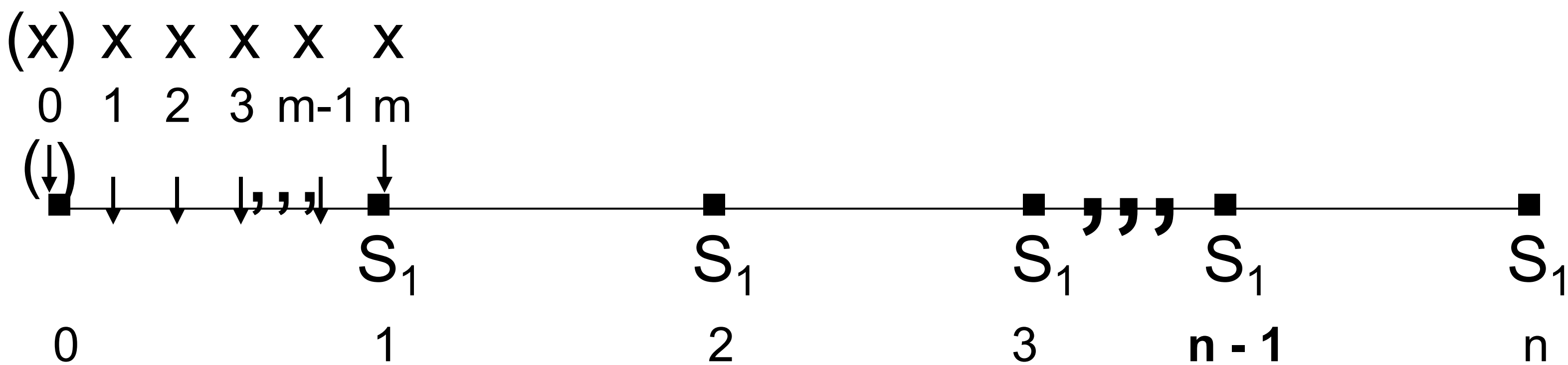
Řešení:

$$D = 1500000.(1 - 1{,}05^{-5})/0{,}05$$

$$= 6\ 494\ 215 \text{Kč}$$

Důchod bezprostřední s více výplatami za 1 období

- Uvažujme důchod po *n* období
- během jednoho období výplata *m*-krát
- částka ve výši *x* na konci (počátku) každé *m*-tiny období



- Nejdříve pomocí krátkodobého spoření spočítáme budoucí hodnotu m výplat za 1 období S_1

$$S_1 = m.x.(1 + \frac{(m \pm 1)}{2.m}.i)$$

- znaménko **+** vyplácí-li se částka x na počátku každé m-tiny úrokového období,
- znaménko **–** vyplácí-li částka x na konci každé m-tiny úrokového období

- Současná hodnota důchodu se vypočítá jako součet současných hodnot n výplat S_1 vztažených k počátku

$$D = S_1 . \frac{(1 - (1 + i)^{-n})}{i}$$

$$D = m.x.(1 + \frac{(m \pm 1).i}{2.m}) \cdot \frac{(1 - (1 + i)^{-n})}{i}$$

Příklad

- Na konci každého měsíce je nutno zaplatit nájem za nebytové prostory ve výši 20 000 Kč. Na konci června musíme zaplatit zpětně nájemné za duben a květen a navíc jsme se rozhodli, že zaplatíme nájemné až do konce roku. Jakou částku budeme v červnu platit, jestliže úroková sazba je 6 % p.a. s měsíčním připisováním úroků?
- Výsledek: 178 228,19

Řešení

- Spoření

$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad S = 20000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^3 - 1}{\frac{0,06}{12}} = 60300,50$$

- Důchod

$$D = a \cdot \frac{1-v^n}{i} \quad D = 20000 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+\frac{0,06}{12}}\right)^6}{\frac{0,06}{12}} = 117927,69$$

Příklad

- Kupujete nemovitost. Odhadujete, že bude vynášet nájemné 10 000 Kč na konci každého měsíce. Předpokládáte její držbu po dobu 3 let, za 3 roky ji budete moci prodat za 2,5 mil. Kč. Jaká je maximální cena, za kterou jste ochotni nemovitost koupit, když požadujete výnos 24 % p.a.?
- Výsledek: 1 575 128

Řešení

- Cena – současná hodnota všech budoucích plateb

$$P_0 = X \cdot k \cdot \left[1 + \frac{k-1}{2 \cdot k} \cdot i\right] \cdot \frac{1 - v^n}{i} + \frac{P_t}{(1+i)^n}$$

$$P_0 = 10\,000 \cdot 12 \cdot \left[1 + \frac{12-1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}24\right] \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}24}\right)^3}{0{,}24} + \frac{2\,500\,000}{(1+0{,}24)^3} = 1575128$$

Příklad

- Dlužník se zavázal splácet 800 Kč měsíčně, polhůtně po dobu 10 let. Počátkem 5. roku (hned potom, co byla zaplacena 48. splátka) věřitel tuto pohledávku prodal. Kolik činila cena pohledávky, jestliže úroková sazba byla 8 % p.a. a úrokové období bylo 1 měsíc?
- Výsledek: 45 627,6

Řešení

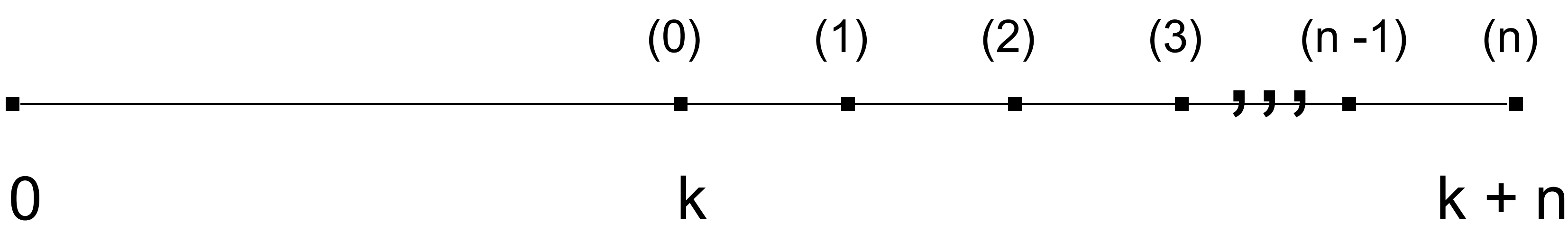
- Kupující pohledávky obdrží ještě 12x6 plateb ve výši 800 Kč

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

$$D = 800 \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{1}{1 + \dfrac{0{,}08}{12}} \right)^{72}}{\dfrac{0{,}08}{12}} = 45\,627{,}6$$

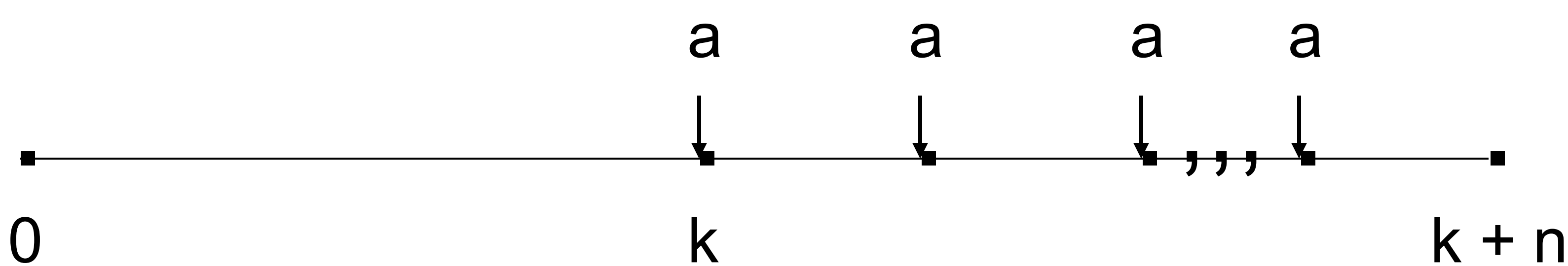
Důchod odložený

- Výplata je posunutá o k období
- Dle okamžiku, kdy v 1 období dochází k výplatě, se dělí opět na :
  - předlhůtní
  - polhůtní



Důchod odložený předlhůtní

- Nechť je vyplacen důchod ve výši a vždy na počátku jednoho období od konce k-tého období do (k + n)-tého období, celkem je vyplaceno n důchodů (anuit) při úrokové sazbě i



- Hodnota n anuit na konci k-tého období lze vypočítat pomocí bezprostředního důchodu:

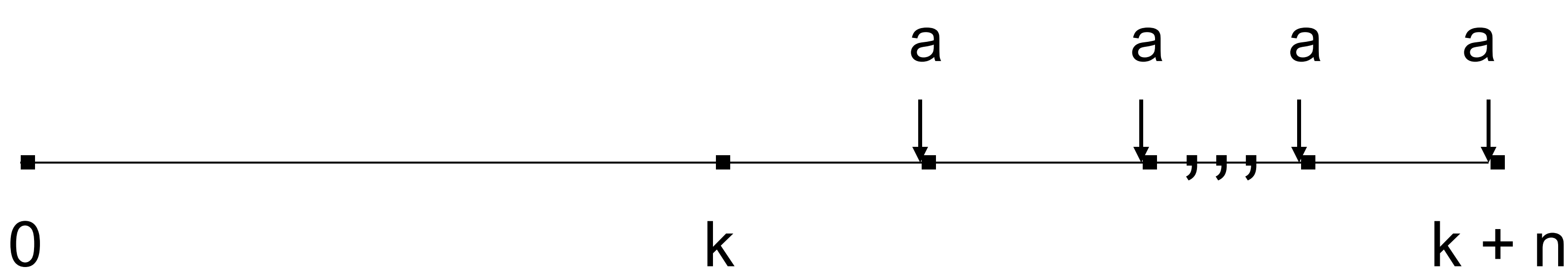
$$D_k' = a.(1 + i). \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

- Současná hodnota n anuit vyplacených na počátku každého období vztažená k úplnému počátku je

$$D' = a.(1 + i)^{1-k}. \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Důchod odložený polhůtní

- Nechť je vyplacen důchod ve výši a vždy na konci jednoho období od konce (k+1)-tého období do (k + n)-tého období, celkem je vyplaceno n důchodů (anuit) při úrokové sazbě i



- Analogicky jako u předlhůtního důchodu odloženého, hodnota n anuit na konci k-tého období lze vypočítat pomocí bezprostředního důchodu:

$$D_k = a.\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

- Současná hodnota n anuit vyplacených na konci každého období vztažená k úplnému počátku je

$$D = a.(1 + i)^{-k}.\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

- Pokud během jednoho období je vyplaceno m anuit ve výši x (ať už na počátku či na konci každé m-tiny jednoho období) po n období, postup je zcela analogický. Nejdříve vypočítáme hodnotu důchodu v čase k, pak diskontujeme k úplnému počátku. Finální vzorec je následující:

$$PV = (1+i)^{-k}.m.x.\left(1 + \frac{(m \pm 1).i}{2m}\right).\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Poznámka:

+ ve vzorci platí pro předlhůtní důchod

- ve vzorci platí pro polhůtní důchod

- Příklad:

  Máme k dispozici 30 000 Kč. Touto částkou si chceme zajistit roční polhůtní důchod na pět let s tím, že s jeho výplatou začneme za dva roky. Jak vysoké budou výplaty při neměnné 4% roční úrokové sazbě?

Řešení:

$$30000 = 1{,}04^{-2}.x.(1 - 1{,}04^{-5})/0{,}04$$

$$x = 7288{,}7 \text{ Kč}$$

- Příklad:

  Po narození dítěte byla uložena částka 100 000 Kč do podílového fondu s průměrnou roční výnosností ve výši 3,5% do dovršení jeho plnoletosti. Zjistěte, jaká je velikost částky vyplacené potomkovi na počátku každého měsíce po dobu 10 let. Při vyplacení důchodu předpokládejme vyšší úrokovou sazbu 4,5% p.a. a roční úročení.

Řešení: $x = 1909{,}70$ Kč

$$100000 = 1{,}035^{-18}.12.x.(1 + 13.0{,}045/24).$$

$$(1 - 1{,}045^{-10})/0{,}045$$

Důchod věčný

- Důchod je vyplacen po dobu nekonečně dlouhou
- Opět se dělí na ,
  - Předlhůtní
  - Polhůtní
- Pro začátek předpokládejme, že důchod je vyplacen jednou za období
- Nechť je vyplacen důchod ve výši a při úrokové sazbě i nekonečně dlouho

- Důchod věčný předlhůtní: současná hodnota důchodu věčného předlhůtního je limitní hodnota bezprostředního důchodu předlhůtního, když $n \to \infty$

$$D' = \lim_{n \to \infty} a.(1 + i).\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = a + \frac{a}{i}$$

- Důchod věčný polhůtní: stejnou analogií dostaneme vzorec pro výpočet důchodu věčného polhůtního:

$$D = \lim_{n \to \infty} a.\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = a/i$$

- Pokud během jednoho období je vyplaceno m anuit ve výši x (ať už na počátku či na konci každé m-tiny jednoho období) po nekonečně dlouhou dobu, pak současná hodnota věčného důchodu bude:

$$PV = \lim_{n\to\infty} m.x.(1 + \frac{(m \pm 1).i}{2m})\,\frac{(1 - (1 + i)^{-n})}{i}$$

$$= m.x.\frac{1}{i}.(1 + \frac{(m \pm 1).i}{2m})$$

Příklad

- Určete cenu (výnosovou hodnotu domu, jehož roční výnos je stabilizován ve výši 400 tis. Kč po relativně neomezenou dobu. Diskontní míra je 9%.

- 4 444 444,44 Kč

Příklad - odložený

- Cena novostavby – roční výnos stabilizován na 300 tis. Kč ročně
- Okamžitý výnos znemožněn probíhajícími dokončovacími pracemi, dá se očekávat až po celkovém dokončení lokality po 2 letech
- Diskontní míra 9%
- 2 805 599,97 Kč

Příklad – věčný důchod

- O Kolik je třeba zvýšit částku, kterou jste zajistili pololetní polhůtní věčný důchod ve výši Kč 3000,-, chcete-li jej změnit na čtvrtletní předlhůtní věčný důchod ve výši Kč 1500,-? Úrokové období je roční.

Současná hodnota důchodu s konstantním tempem růstu anuity

- Nechť je vyplacen v 1. období polhůtní důchod ve výši a, jehož výše roste v dalších obdobích stejnou rychlostí g. Úroková sazba je neměnná po celou dobu n období ve výši i. Současná hodnota důchodu D je:

$$D = a/(1 + i) + a.(1 + g)/(1 + i)^2 + \cdots$$

$$\cdots + a.(1 + g)^{n-1}/(1 + i)^n$$

$$= (a/(1 + i)).[1 + (1 + g)/(1 + i) + \cdots$$

$$\cdots + ((1 + g)/(1 + i))^{n-1}]$$

Výraz v hranaté závorce je konečný součet n členů geometrické řady s 1. členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = (1 + g)/(1 + i)$, jejíž součet je:

$$S_n = \frac{[(1 + g)/(1 + i)]^n - 1}{(1 + g)/(1 + i) - 1}$$

Současná hodnota důchodu D je:

$$D = (a/(1 + i)).\frac{[(1 + g)/(1 + i)]^n - 1}{(1 + g)/(1 + i) - 1}$$

$$D = a.\frac{1 - [(1 + g)/(1 + i)]^n}{i - g}$$

První platba

- Nechť úvěr ve výši D je splacen na konci každého období n splátkami, jejichž výše roste konstantním tempem g při neměnné úrokové sazbě i.
- Velikost 1. splátky je:

$$a = \frac{(i - g).D}{1 - [(1 + g)/(1 + i)]^n}$$

Úroková platba v 1. roce : $U_1 = i.D$

Úmor v 1. roce je: $M_1 = a - U_1$

Příklad

- Cena (výnosová hodnota nemovitosti
- Roční výnos 1 mil – bezpečně dosažitelný v horizontu 10 let, tedy diskontní míra 7%,
- V dalších letech riziko – dosažitelnost výnosu klesá – tedy diskontní míra 11%

- 7 343 749,25 Kč

11 644 938,74 Kč

Příklad

- Cena nemovitosti
- Výnos 2 mil ročně po dobu 10 let
- V 11 roce demolice za 3 mil Kč
- Diskontní míra dočasné renty 9%, diskontní míra pro demolici 12%

- 12 002 888,-

13 697 743,71 Kč

Příklad

- Výnosová hodnota obchodních prostor z hlediska nájemce
- Smlouva na 3 roky
- Výnosy 2mil, 2,3 mil, 2,5 mil
- Diskontní míra 8%
- Další výnosy ani náklady nepředpokládáme
- 6116459,89
- Konstatntní 2,3mil ročně – 5927323,07

Příklad

- Na jakou maximální cenu by měl investor přistoupit při převzetí podniku, který má zajištěnou tržbu ve výši 170 mil. Kč v 1. roce po převzetí, přičemž v dalších letech tržba bude růst tempem 6 % p.a a výdaje na zajištění chodu podniku v 1. roce jsou 85 mil. Kč a dále stoupají 9 % p.a ročně? Investor požaduje výnosnost z investice ve výši 14 % p.a. a nekonečný časový horizont.
- 2 125mil; 1700; 425 mil

Příklad

- U investice s dobou životnosti 9 let očekáváme stabilní výnosy 1 mil. Kč ročně po celou dobu životnosti. Celkové roční náklady na provoz investice činí 1. rok 600 000 Kč a každý další rok rostou o 5 % oproti předchozímu roku. Jaká je současná hodnota investice, jestliže požadujeme výnosnost minimálně 10 % ročně a na konci životnosti budeme muset vynaložit 700 000 Kč na její ekologickou likvidaci?
- 5 759023,82; 4 105024,78; 296868,33:
- 1 357130,70

- Pokud bychom byli investor do nemovitostí a uvažovali bychom o koupi 3 bytů **za cenu 10 mil. Kč** (celkem), které nám budou v následujících letech generovat **příjem (čistý) 185tis. Kč ročně** polhůtně (každý) v prvním roce, následně **budou příjmy růst o 2,5%** ročně a **po 10 letech nemovitosti prodáme**. Jakou bychom požadovali **minimální cenu za prodej nemovitostí** v budoucnu pokud chceme dosáhnout **výnosové míry alespoň 8%**?"

$$D = a \cdot \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^n}{i - g} \qquad\qquad K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i \cdot (1-d)}{m} \right)^n$$

- Uvedený vztah pro D použijeme pro výpočet současných hodnot nájemného, kde g=2,5% a i=8%, a=185tis., n=10
- Chceme získat prodejní cenu, je třeba získaný součet (nákupní cena + současná hodnota rostoucích nájemných) zúročit pomocí složeného úročení po dobu 10 let.
- K0 = vypočtený součet, i=8%, m=1, d=0, n=10