FINANČNÍ MATEMATIKA 1BP310

PŘEDNÁŠEJÍCÍ:
Jarmila Radová

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MŠMT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontakt

- Radová
  - Tel: 224 095 102
  - E-mail: radova@vse.cz
  - Místnost 180 NB
  - Konzultace
    - Po 12:30 - 13:30

Osnova

- 1.Jednoduché úročení
- 2. Diskontování
  - krátkodobé cenné papíry
  - Metody vedení a výpočtu úroku z běžného účtu
  - Skonto
- 3.Složené + smíšené úrokování
- 4.Budoucí hodnota anuity
  - spoření
- 5. Současná hodnota anuity
  - Důchody
- 6+7.Umořování dluhu
  - úvěry

Osnova

- 8+9.Dluhopisy
  - ohodnocování
  - durace dluhopisu
- 10. Promptní a lhůtové výnosové křivky
- 11. Portfolio, Termínové obchody
- 12. Akcie
  - vnitřní hodnota
  - hodnota odebíracího práva

Literatura

- Základní
  - Radová J., Dvořák P., Málek J.: Finanční matematika pro každého (8. vydání, 2013)
  - Radová J., Chýna V., Málek J.: Finanční matematika v příkladech (2.vydání)
  - Radová a kol. : Finanční matematika pro každého – příklady (2. vydání)
- Doporučená:

Cipra T.: Finanční matematika v praxi

a další

Úspěšné absolvování

- zkouška formou dvou testů + aktivita na cvičení (max. 10b)
  - průběžný test - na cvičení (v týdnu od 4.11.2019)
    - probraná témata do důchodů včetně
    - max. 20 bodů,
  - závěrečný test
    - ve zkouškovém období – 18.12.2019, 8.1.2020, 22.1.2020, 5.2.2020
    - max. 70 bodů, min. 35
  - přihlašování na termíny ve zkouškovém období
    - InSIS
- úspěch – 60 b. ze součtu tří částí
- K dispozici excel a vzorce

Finanční matematika - úvod

Co je finanční matematika?

Co jsou finance (teorie financí)?

- zkoumání možnosti získat a investovat zdroje v čase a v podmínkách rizika či nejistoty
- vysvětlování úlohy
  - peněz
  - cenných papírů
  - finančních trhů

Finanční matematika je tedy využití matematiky ve financích.

Preference investora při investování:

- více peněz před méně
- méně rizika před více
- (stejná suma) peníze v současnosti před (stejná suma) penězi v budoucnosti

Časová hodnota peněz

- souvisí s 3. preferencí investora
- je to finanční metoda, která slouží k porovnání různých peněžitých částek z různých období
- je spojena s důležitými finančními pojmy jako **úrok** a **úroková míra**

Úrok pro investora
odměna za dočasnou ztrátu kapitálu (když jeden subjekt půjčí druhému), za riziko spojené se znehodnocením kapitálu (např. inflací), za nejistotu, že kapitál nebude splacen v dané lhůtě a výši.

Úrok pro dlužníka
cena vypůjčeného kapitálu

Úroková míra je procentuální vyjádření výše úroku k celkové výši půjčeného kapitálu

Základní druhy úrokové míry

- nominální úroková míra
- efektivní úroková míra
- zvažovaná úroková míra
- vnitřní výnosové procento

Typy úročení

- jednoduché úročení
- složené úročení
- smíšené úročení

dle doby placení úroku se dělí na

- polhůtní či dekursivní úročení
- předlhůtní či anticipativní úročení

Jednoduché úročení polhůtní

úročí se stále pouze základní částka, vyplacené úroky se k ní nepřičítají.

$$\boldsymbol{u = K_0 . i . t}$$

kde K_0 počáteční peněžní částka (kapitál);

i roční úroková sazba jako desetinné číslo

t doba splatnosti (uložení) v letech

u úrok

Pokud je doba uložení vyjádřená v jiných časových jednotkách, je nutno ji převést na časovou jednotku v letech podle vzorce

$$t = \frac{\text{počet dní existence vztahu}}{\text{délka roku v dnech}}$$

Počet dní v čitateli může být uveden podle kódů:

- **ACT** – skutečný počet dní smluvního vztahu bez prvního dne;
- **30E** – celý měsíc se bere vždy
- **30A** – liší se od 30E maximálně o 1den v případě, kdy konec smluvního vztahu je na 31. den v měsíci a začátek není 30. nebo 31.den.

Délka roku ve jmenovateli je uvedena:

- rok jako **365** dnů (resp. 366 v přestupném roce);
- rok jako **360** dnů.

Kombinace uvedených možností ➔ různé standardy

- **ACT/365 (anglická metoda)** založen na skutečném počtu dnů úrokového období (čitatel) a délce roku 365 (resp. 366) dnů;
- **ACT/360 (francouzská či mezinárodní metoda)** založen na skutečném počtu dní v čitateli zlomku, ale délka roku (ve jmenovateli) se započítává jako 360 dnů;
- **30E/360 (německá či obchodní metoda)** založen na kombinaci započítávání celých měsíců jako 30 dnů (v čitateli) a délky roku (ve jmenovateli) jako 360 dnů.

Pro akademický účel se nejčastěji využívá 30E/360.

Příklad

- Na kolik se zúročí 10 tis. Kč při různých standardech a úrokové míře 10 % p.a. v období
- od 15.1.1996 do 7.9.1996,
- od 10.1.1997 do 3.3.1997 a
- od 29.10.1999 do 31.12. 1999.

Excell

Od	Do	Počet dnů ACT	30E	30A	n při různých standardech ACT/360	ACT/365	30E/360	30A/360
15.1.1996	7.9.1996	236	232	232	0,6556	0,6448	0,6444	0,6444
10.1.1997	3.3.1997	52	53	53	0,1444	0,1425	0,1472	0,1472
29.10.1999	31.12.1999	63	61	62	0,1750	0,1726	0,1694	0,1722

K_n při různých standardech ACT/360	ACT/365	30E/360	30A/360
10 655,56	10 644,81	10 644,44	10 644,44
10 144,44	10 142,47	10 147,22	10 147,22
10 175,00	10 172,60	10 169,44	10 172,22

Zdroj: Autor

Excell - vzorce

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			Počet dnů			n při různých standardech			
2	Od	Do	ACT	30E	30A	ACT/360	ACT/365	30E/360	30A/360
3	35079	35315	=B3-A3	=ROK360(A3;B3;1)	=ROK360(A3;B3;0)	=C3/360	=C3/366	=D3/360	=E3/360
4	35440	35492	=B4-A4	=ROK360(A4;B4;1)	=ROK360(A4;B4;0)	=C4/360	=C4/365	=D4/360	=E4/360
5	36462	36525	=B5-A5	=ROK360(A5;B5;1)	=ROK360(A5;B5;0)	=C5/360	=C5/365	=D5/360	=E5/360
6						K_n při různých standardech			
7						ACT/360	ACT/365	30E/360	30A/360
8						=10000*(1+0,1*F3)	=10000*(1+0,1*G3)	=10000*(1+0,1*H3)	=10000*(1+0,1*I3)
9						=10000*(1+0,1*F4)	=10000*(1+0,1*G4)	=10000*(1+0,1*H4)	=10000*(1+0,1*I4)
10						=10000*(1+0,1*F5)	=10000*(1+0,1*G5)	=10000*(1+0,1*H5)	=10000*(1+0,1*I5)

Zdroj: Autor

Příklad:

Půjčka ve výši 200 000 Kč se splácí na konci každého měsíce částkou 10 000 Kč plus úrok s měsíční úrokovou mírou 1% z nesplacené jistiny. Jaká je celková úroková platba?

- Výsledek:		21 000 Kč

Příklad:

Půjčka na nemovitost ve výši 1500 000 Kč se splácí měsíčními platbami ve výši 12078 Kč po dobu 25 let. Úroková sazba je 8,5% p.a.

Jakou hodnotu nemovitosti zaplatí první splátka?

- Výsledek (10625, 1453)

Základní vzorec jednoduchého úročení polhůtního

$$K_t = K_0 . (1 + i.t)$$

kde

K_0 počáteční peněžní částka (kapitál);

i roční úroková sazba jako desetinné číslo

t doba splatnosti (uložení) v letech

K_t částka na konci doby t, budoucí hodnota kapitálu

Odvozené vzorce

Počáteční (základní) kapitál:

$$K_0 = \frac{K_t}{(1 + it)}$$

Doba splatnosti (úročení)

$$t = \frac{K_t - K_0}{K_0 . i}$$

Úroková míra

$$i = \frac{K_t - K_0}{K_0 . t}$$

Příklad:

Vklad uložený 20.3.14 vzrostl připsáním úroku při úrokové sazbě 3% p.a. k 31.12.14 na 767,50 Kč. Určete úrok a původní vklad.

Výsledek: původní vklad = 750 Kč

úrok = 17,50 Kč

(od 20.3. do konce roku je 280 dní při aplikaci standardu 30/360)

Příklad:

Za jakou dobu byl připsán úrok při úrokové sazbě 4% p.a., jestliže částka 3960 Kč vzrostla na 4 000 Kč.

Výsledek: 91 dní

Příklad

- Půjčili jste si peníze.
- Věřitel Vám nabídne 3 možnosti splácení:
  - za 11 měsíců 2000,
  - za 8 měsíců 1900,
  - za 2 měsíce 200 a za 12 měsíců 1800.
- Kterou možnost zvolíte, činí-li běžná úroková sazba 16 % p.a.?

- Výsledek: 2. varianta

Příklad

- Zájemce má možnost zaplatit za nákup pozemku
  - okamžitě 50 000 EUR
  - za rok 54 000 EUR.
- Hotovost může reinvestovat při úrokové sazbě 7,2 % p.a.

- Která varianta je pro něj výhodnější?

Jednoduché úročení předlhůtní - diskont

- souvisí s eskontem směnek a obchodování s krátkodobými cennými papíry,
- diskont je odměna ode dne výplaty do dne splatnosti pohledávky
- počítá se z budoucí hodnoty pohledávky

Směnka

- CP, platební prostředek
- Druhy: vlastní, cizí
  nebo obchodní či finanční
- Lhůta splatnosti:
  - na viděnou
  - lhůtní
  - datosměnka
  - lhůtní datosměnka

Směnka vlastní

Zdroj: https://www.vytiskni.cz/tiskopis-smenka-vlastni-p8278/

Vzor směnky cizí

V .... dne ....

Za tuto směnku zaplate bez protestu dne ....

na řad ....

směnečnou sumu ve výši ....

Směnečník: ....

Směnka je splatná v .... u ....

jméno a podpis výstavce

akcept směnečníka (jeho jméno a podpis)

Pokud bychom vzor směnky vyplnili tak, že Karel Čapek dává příkaz Ivanu Olbrachtovi, aby zaplatil Vladislavovi Vančurovi 50.000,-Kč, pak by vyplněná směnka vypadala takto:

V Praze dne 20. listopadu 2008

Za tuto směnku zaplaťte bez protestu dne 20. ledna 2009 na řad Vladislava Vančury, bytem Malá Strana 21, Praha, směnečnou sumu ve výši 50.000,-Kč.

Směnečník: Ivan Olbracht, Na nábřeží 65, Brno

Směnka je splatná v Praze u Vladislava Vančury, bytem Malá strana 21

Karel Čapek

směnku přijmám: Ivan Olbracht

Zdroj: Autor

Krátkodobé diskontované CP

- Vládní pokladniční poukázky
- Poukázky ČNB
- Depozitní certifikáty
- Komerční papíry

Jednoduché úročení předlhůtní - diskont

- souvisí s eskontem směnek
- **Diskont** je odměna ode dne výplaty do dne splatnosti pohledávky

$$\boldsymbol{D_{ob} = K_t . d . t} \text{ ,} \qquad \text{kde}$$

D_{ob} obchodní diskont;

K_t hodnota pohledávky splatná za dobu t;

d diskontní sazba jako desetinné číslo, p.a.;

t čas od výplaty do splatnosti pohledávky, v letech;

Vyplacená částka bude:

$$K_{ob} = K_t - D_{ob} = K_t.(1 - d.t)$$

kde K_{ob} je vyplacená částka, ostatní symboly v tomto vzorci jsou již známé

Příklad:

Firma odprodala dne 2.11. bance směnku znějící na částku 150 tis. Kč se splatností 2.12. téhož roku. Jaká byla částka, kterou banka firmě vyplatila při diskontní sazbě 7% p.a..

Výsledek: 149 125 Kč

Vztah mezi předlhůtní diskontní sazbou a polhůtní úrokovou sazbou

Polhůtní úročení:

Současná hodnota

$$K_0 = \frac{K_t}{(1 + it)}$$

Budoucí hodnota

$$K_t = K_0 .(1 + i.t)$$

Předlhůtní úročení – diskont

Současná hodnota

$$K_{ob} = K_t .(1 - d.t)$$

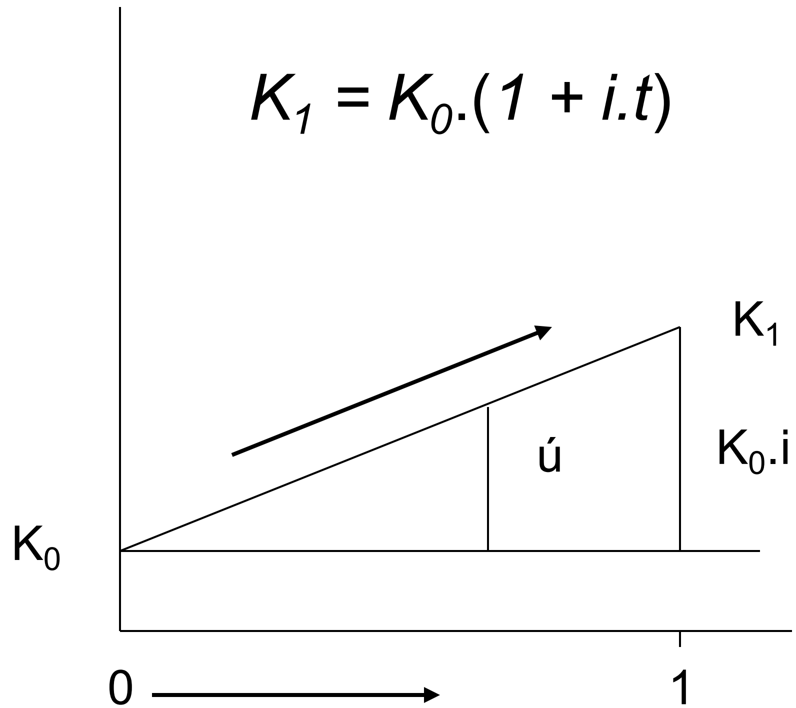
Budoucí hodnota

$$K_t = \frac{K_{ob}}{(1 - d.t)}$$

Grafické znázornění srovnání dvou typů úročení

Jednoduché úročení polhůtní

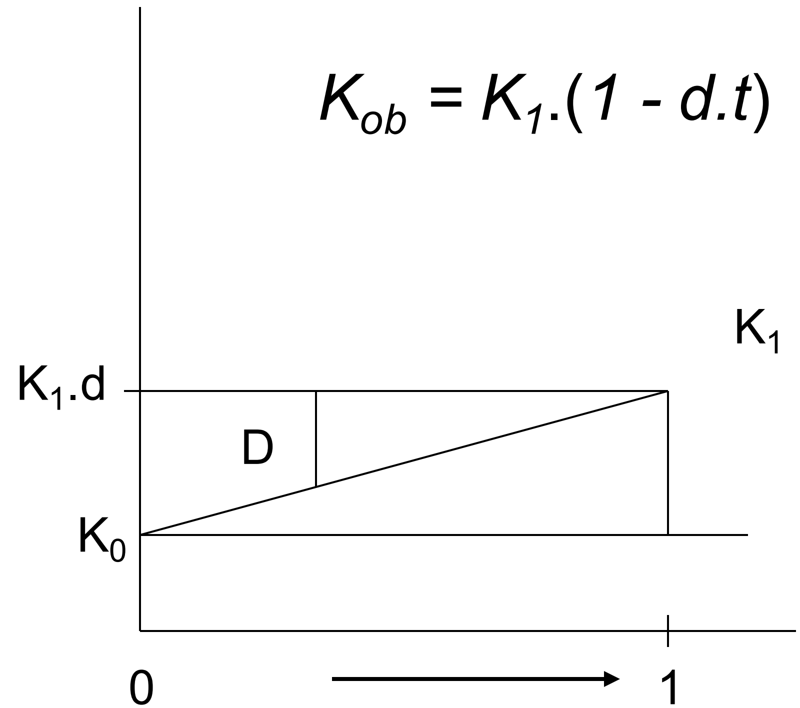
$$K_1 = K_0.(1 + i.t)$$



Jaká doba uplynula

Diskont

$$K_{ob} = K_1.(1 - d.t)$$



Jaká doba zbývá do

Aby předlhůtní a polhůtní úročení byla stejná výhodná, musí se jejich současné a budoucí hodnoty rovnat, tedy

$$K_t.(1 - d.t) = \frac{K_t}{(1 + it)}$$

po aritmetických úpravách

$$i_{ekv} = \frac{d}{1 - d.t} \quad \text{a} \quad d_{ekv} = \frac{i}{1 + i.t}$$

Příklad

- Banka odkoupila směnku znějící na 230 000 Kč s dobou splatnosti 1 rok.
- Jakou byla diskontní sazba banky, jestliže za směnku vyplatila 200 000 Kč?

- Možnosti: 8%, 10%, 15%, žádná
- Výsledek: ???

Příklad

Uvažujme dvě roční půjčky se stejnou splatnou částkou 100 000 Kč. První je založena na obchodním diskontu se sazbou 6% p.a., druhá na jednoduchém úročení se sazbou 6 % p.a..

a) Jaký je zisk věřitele při těchto půjčkách?

b) Jaká úroková sazba při jednoduchém úročení zaručí věřiteli stejný zisk jako diskontní sazba 6 % při obchodním diskontu?

Řešení:

Zisk věřitele = K_t - K_0

první půjčka: $K_t - K_0 = D = K_t.d.t$

$= 100\,000.1.\ 0{,}06 = 6000$ Kč

druhá půjčka: $K_t - K_0 = K_t - K_t/(1 + i.t) =$

$= 100000 – 100000/(1 + 0{,}06.1) =$

$= 5660{,}38$ Kč

Úroková sazba, která zaručí věřiteli stejný zisk jako obchodní diskont 6 %

$i = d/(1 – d.t) = 0{,}06/(1 – 0{,}06.1) = 6{,}38\%$

Příklad:

Potřebujete získat kapitál od banky na 1 rok. Banka vám nabízí 2 možnosti:

a) úvěr polhůtně úročený za úrokovou sazbu 8% p.a.,

b) odkup směnku, kterou vlastníte, za diskontní sazbu 7,5% p.a.. Směnka je splatná za rok.

Rozhodněte se, co je pro vás výhodnější.

Výsledek: i_{ekv} = 8.11% nebo d_{ekv} = 7,41%

Příklad:

Stavební firma vydala směnku na částku 1650000 Kč, která je splatná k 1.6.. Obchodní společnost zakoupila tuto směnku dne 8.3. při diskontní sazbě 5,5% p.a.. Dne 5.4. ji prodala při d = 5,3% p.a.. Jakou roční míru zisku realizovala obchodní společnost touto transakcí.

Řešení:

Od 8.3. do 1.6. je 85 dní (ACT)

Nákupní cena $K_0 = 1650.(1 – 0{,}055.85/360) = 1628{,}57$ K

Od 5.4. do 1.6 je 57 dní (rovněž ACT)

Prodejní cena $K_1 = 1650.(1 – 0{,}053.57/360) = 1636{,}16$ K

Od 8.3. do 5.4. je 28 dní

$$\text{roční míra zisku} = \frac{Kt - K_0}{K_0.t}$$

$$= (1636{,}15 - 1628{,}57)/(1628{,}57.28/360)$$

$$= 5{,}98\%$$

Výpočet náhradních hodnot

- nahradit několik pohledávek jedinou pohledávkou
- sjednotit platební lhůty
- určit průměrnou diskontní sazbou
- zachová se obchodní diskont

Nechť :

K_1 je pohledávka splatná za t_1 při d_1 sazbě

K_2 je pohledávka splatná za t_2 při d_2 sazbě

....

K_r je pohledávka splatná za t_r při d_r sazbě

a) Nahradit r pohledávek jednou pohledávkou splatnou za t^* při sazbě d^*

výše hledané pohledávky bude

$$K^* = \frac{\sum_1^r K_j - \sum_1^r D_{ob_j}}{1 - d^*.t^*}$$

b) výše průměrné diskontní sazby je:

$$d^* = \frac{\sum_1^r K_j . t_j . i_j}{\sum_1^r K_j . t_j}$$

c) průměrná doba splatnosti je:

$$t^* = \frac{\sum_1^r K_j . t_j . i_j}{\sum_1^r K_j . i_j}$$

Příklad:

Dlužník má zaplatit:

800 Kč za 60 dní

1 000 Kč za 70 dní

1 500 Kč za 80 dní.

Jakou částku by měl zaplatit za 30 dní při diskontní sazbě 4% p.a., nemění-li se diskont.

Řešení:

$$K^* = \frac{3300 - (800.0{,}04.60/360 + 1000.0{,}04.70/360 + 1500.0{,}04.80/360)}{(1 - 0{,}04.30/360)}$$

$$= 3285{,}60 \text{ Kč}$$

Střední doba splatnosti

• Firma eskontovala dne 3.11.			
• Směnka	A	B	C
• Částka	100 000	150 000	80 000
• Splatnost	15.11.	2.12.	7.12.

- Diskontní sazba 10%
- Stanovte střední dobu splatnosti.

Skonto

2 možnosti zaplacení při nákupu zboží:

- platba na úvěr (prodejní cenu zaplatit za určitou dobu
- zaplatit okamžitě (resp. během krátké stanovené lhůty), přičemž je poskytnuta sleva z ceny (skonto)

Absolutní výše skonta je:

$$SK = \frac{r_{sk.}.PC}{100}$$

Kde:

SK je absolutní výše skonta

PC je prodejní cena v plné výši

r_{sk} je skonto v % prodejní ceny

(není však na roční bázi)

- Na skonto lze pohlížet jako na úrok, celý postup je možno chápat jako poskytnutí úvěru
- Je výhodné využít skonto tehdy, bude-li vyšší než úrok z případného úvěru při sazbě *p* za dobu od T_0 do T_1 čili:

$$SK > \frac{(PC - SK).p.t}{100}$$

- Lze rovněž vyjádřit skonto v % na roční bázi, a sice:

$$p_{sk} = \frac{SK.100.360}{(PC - SK).t}$$

Příklad:

Obchodní firma nabízí zboží za cenu 200 tis. Kč. Částka je splatná do 28 dní. Firma poskytuje slevu ve výši 1,5% prodejní ceny, pokud zaplatí kupující hotově. V tomto případě si kupující musí vzít krátkodobý úvěr při i = 15% p.a.. Poraďte mu, zda má využít nabízeného skonta.

Řešení:

výše skonta = 0,015 . 200000 = 3000 Kč

úrok z příp. úvěru = (200 – 3).28.0,15/360 =

= 2298,33 Kč (ano, využít skonto)

Složené úročení

- U jednoduchého úročení úroky narůstají lineárně, nevznikají úroky z úroků
- U složeného úročení se úroky přičítají k původnímu kapitálu a úročí se ze zúročeného kapitálu
- Úročí se pouze polhůtně

Výpočet složeně úročeného kapitálu

předpoklady:

a) úrokovací období je jeden rok

b) ukládá se celý počet let

Nechť :

K_0 je původní kapitál

i je úroková sazba

n je doba splatnosti v letech

$K_1, \dots, K_{n-1}$ jsou výše kapitálu na konci 1, …, (n – 1)- tého roku

Pak

Rok	Stav kapitálu na konci roku	
1	$K_1 = K_0 + K_0 .i$	$= K_0 .(1 + i)$
2	$K_2 = K_1 + K_1.i = K_1.(1 + i)$	$= K_0 .(1 + i)^2$
3	$K_3 = K_2 + K_2.i = K_2.(1 + i)$	$= K_0 .(1 + i)^3$
…	………	……
n - 1	$K_{n-1} = K_{n-2} + K_{n-2}.i = K_{n-2}.(1 + i)$	$= K_0 .(1 + i)^{n-1}$

Zdroj: Autor

Základní rovnice pro složené úročení

$$K_n = K_0 . (1 + i)^n \qquad (1)$$

Kde K_n je budoucí hodnota kapitálu (zúročený kapitál);

K_0 je současná (počáteční) hodnota kapitálu;

n je doba splatnosti (úroková doba);

i je roční úroková sazba