

Finanční matematika



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MŠMT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Složené úročení

- U jednoduchého úročení úroky narůstají lineárně, nevznikají úroky z úroků
- U složeného úročení se úroky přičítají k původnímu kapitálu a úročí se ze zúročeného kapitálu
- Úročí se pouze polhůtně

Výpočet složeně úročeného kapitálu

předpoklady:

- a) úrokovací období je jeden rok
- b) ukládá se celý počet let

Necht' :

K_0 je původní kapitál

i je úroková sazba

n je doba splatnosti v letech

K_1, \dots, K_{n-1} jsou výše kapitálu na konci
1, ..., $(n - 1)$ - tého roku

Pak

Rok	Stav kapitálu na konci roku	
1	$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i$	$= K_0 \cdot (1 + i)$
2	$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1 \cdot (1 + i)$	$= K_0 \cdot (1 + i)^2$
3	$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = K_2 \cdot (1 + i)$	$= K_0 \cdot (1 + i)^3$
...
n - 1	$K_{n-1} = K_{n-2} + K_{n-2} \cdot i = K_{n-2} \cdot (1 + i)$	$= K_0 \cdot (1 + i)^{n-1}$

Základní rovnice pro složené úročení

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n \quad (1)$$

Kde K_n je budoucí hodnota kapitálu (zúročený kapitál);

K_0 je současná (počáteční) hodnota kapitálu;

n je doba splatnosti (úroková doba);

i je roční úroková sazba

Poznámka:

- člen $(1 + i)$ se také nazývá **úrokovací faktor** (úročitel). Udává, na kolik vzroste vklad 1 Kč za 1 rok při úrokové sazbě i .
- **úročitel** $(1 + i)^n$ udává, na kolik vzroste vklad 1 Kč za dobu n při úrokové sazbě i

Příklad:

Uložili jsme částku 120 000 Kč. Jaká bude výše kapitálu za tři roky při složeném úročení polhůtním, jestliže úrokové období je roční a úroková sazba činí 2,5 % p.a..

Řešení: $K_3 = 120 \text{ tis.} \cdot (1 + 0,025)^3 = 129\,226,88 \text{ Kč}$

Odvozené vzorce z (1)

- Současná hodnota vkladu

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + i)^n}$$

- Úroková sazba

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

- Doba uložení

Příklad:

Klient si vypůjčil od banky částku 50 tis. Kč.
Dluh má splatit dvěma stejnými splátkami za rok a za 2 roky. Jaká je velikost těchto splátek při úrokové sazbě 8% p.a..

Řešení:

$$50 \text{ tis.} = x/(1 + 0,08)^1 + x/(1 + 0,08)^2$$

$$x = 28038,46 \text{ Kč}$$

Doba uložení

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1 + i)}$$

Příklad:

Určete dobu splatnosti (uložení) kapitálu ve výši 10 000 Kč, jestliže bylo v době splatnosti vyplaceno 11 000 Kč při úrokové sazbě 2 % p.a..

Řešení:

$$n = \frac{\ln(11000) - \ln(10000)}{\ln(1 + 0,02)} = 4,80 \text{ let}$$

Příklad:

Jaká byla úroková sazba z vkladu, jestliže částka 2 mil. Kč uložena po dobu 2 let vzrostla na 2 163 200 Kč. Úroky byly připisovány jednou ročně a ponechány na účtu a dále úročeny stejnou sazbou.

Řešení:

$$\begin{aligned} i &= (K_t/K_0)^{1/2} - 1 = (2,1632/2)^{1/2} - 1 \\ &= 0,04 \quad (4\%) \end{aligned}$$

Složené úročení

při úrokovém období kratším než 1 rok

- V praxi úrokové období může být kratším než 1 rok, tzn. Úroky jsou připisovány častěji než jednou za rok
- Úrokové období může být pololetní, čtvrtletní, měsíční,...
- Stav kapitálu na konci roku, když během 1 roku úroky jsou připisovány m -krát, bude určen následovně

Necht':

K_0 je původní kapitál

i je roční úroková sazba

m je četnost připisování úroků za 1 rok

i/m je úroková sazba za 1 m -tinu roku

$K_{1/m}, \dots, K_{m/m}$ jsou výše kapitálu na konci

1., ..., m -té části roku $K_{m/m} = K_1$

Část roku	Stav kapitálu na konci příslušné části roku	
1	$K_{1/m} = K_0 + K_0 \cdot i/m$	$= K_0 \cdot (1 + i/m)$
2	$K_{2/m} = K_{1/m} + K_{1/m} \cdot i/m = K_{1/m} (1 + i/m)$	$= K_0 \cdot (1 + i/m)^2$
3	$K_{3/m} = K_{2/m} + K_{2/m} \cdot i/m = K_{2/m} \cdot (1 + i/m)$	$= K_0 \cdot (1 + i/m)^3$
...
m	$K_{m/m} = K_{m-1/m} + K_{m-1/m} \cdot i/m = K_{m-1/m} (1 + i/m)$	$= K_0 \cdot (1 + i/m)^m$

- Protože $K_{m/m} = K_1$, stav kapitálu za n let, když úrok je připisován m -krát za rok, bude

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i/m)^{m \cdot n}$$

Kde:

K_0 je současná (počáteční) hodnota kapitálu;

n je doba splatnosti

m je četnost připisování úroků za 1 rok

i je roční úroková sazba

i/m je úroková sazba za 1 m -tinu roku

K_n je budoucí hodnota kapitálu

Příklad:

Klient dluží bance 200 tis. splatných za rok a 300 tis. splatných za 2 roky. Dohodl se však s bankou na okamžitém vyrovnání dluhu. Kolik musí zaplatit, když banka mu účtuje úrokovou sazbu 7,5 % p.a. s půlročním úrokovým obdobím.

Řešení:

$$\begin{aligned}x &= 200\text{tis.}/(1+0,075/2)^2+300\text{tis.}/(1+0,075/2)^4 \\ &= 444725,38 \text{ Kč}\end{aligned}$$

Příklad:

Jaká úroková sazba se čtvrtletním složeným úročením zúročí za 5 let 50 tis. Kč na 70 tis. Kč?

Řešení:

$$\begin{aligned}i &= m \cdot [(K_t / K_0)^{1/m \cdot n} - 1] \\ &= 4 \cdot [(70/50)^{1/4 \cdot 5} - 1] = 6,79\%\end{aligned}$$

Srovnání jednoduchého a složeného úročení

- Jednoduché úročení
stav kapitálu za n let

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$$

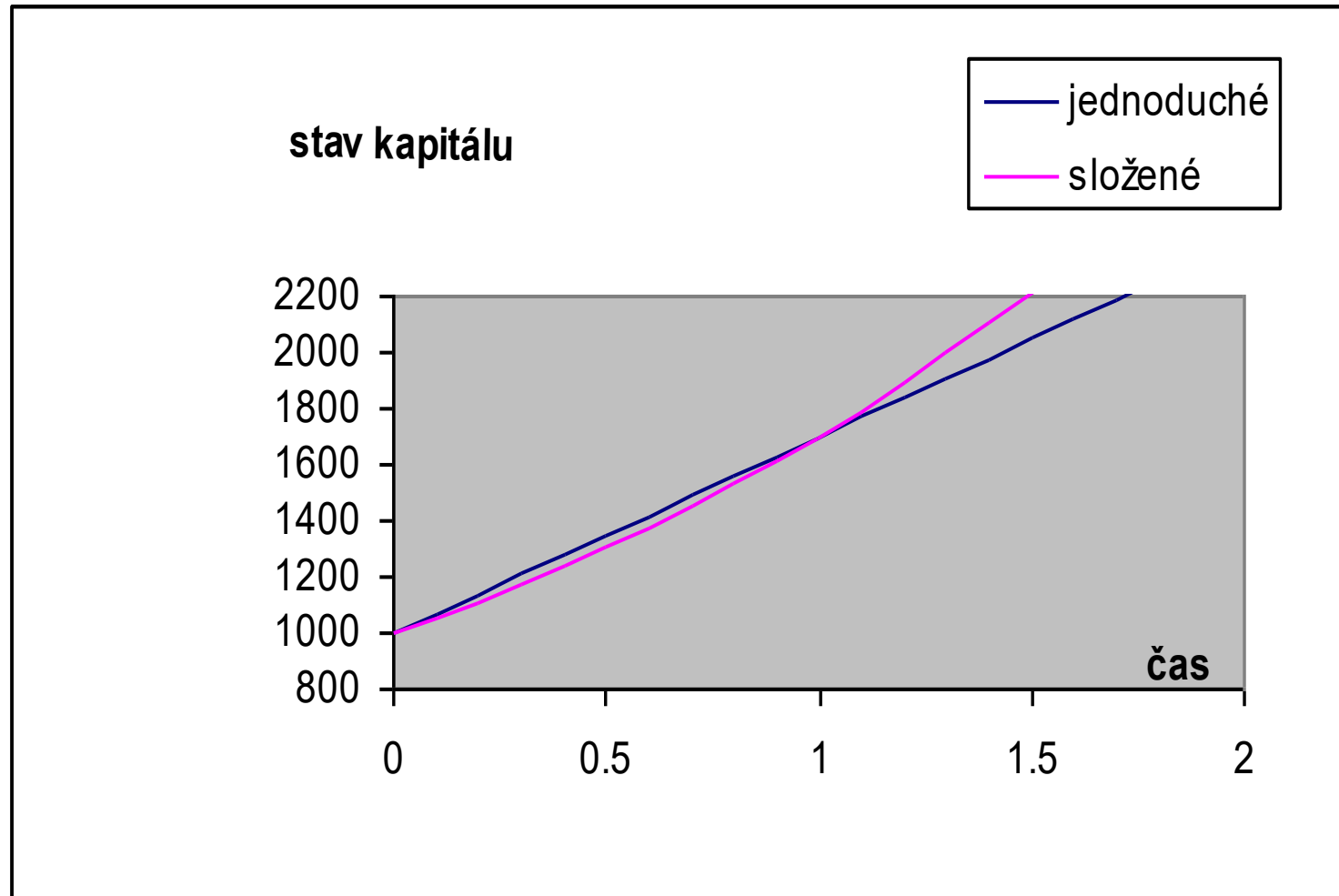
Lineární závislost
stavu kapitálu na čase

- Složené úročení
stav kapitálu za n let

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

Exponenciální
závislost stavu
kapitálu na čase

Grafické znázornění



červené položky platíte Vy
zelené položky platí Ministerstvo financí Vám

Základní parametry spořicíh státních dluhopisů vydávaných dne 11. 11. 2011

Státní spořicí dluhopis	1 Diskontovaný	5 Kuponový	+5 Reinvestiční
Upisovací období	3. 10. – 1. 11. 2011	3. 10. – 1. 11. 2011	3. 10. – 1. 11. 2011
Datum emise	11.11.2011	11.11.2011	11.11.2011
Datum splatnosti	12.11.2012	11.11.2016	11.11.2016
Nominální hodnota 1 ks	1 Kč	1 Kč	1 Kč
Emisní kurz	98%	100%	100%
Min. upisovaný objem	1000 ks	1000 ks	1000 ks
Požizovací cena 1000 ks	980 Kč	1000 Kč	1000 Kč
Max. upisovaný objem	bez omezení	bez omezení	bez omezení
Typ úročení	diskont*	rostoucí pevná úroková sazba	rostoucí pevná úroková sazba
Výplata úrokového výnosu	při splatnosti	1x ročně	při splatnosti
Možnost předčasného splacení	ANO	ANO	ANO
Reinvestice úrokového výnosu**	NE	NE	ANO


* rozdíl mezi nominální hodnotou dluhopisu a jeho pořizovací cenou


** úrokový výnos není vyplácen, ale je reinvestován připsáním dalších spořicíh dluhopisů v objemu úrokového výnosu na Váš majetek


Zdroj: MF - odbor 20 - Řízení státního dluhu a finančního majetku; publikováno 15.09.2011


iqht © 2011, MFČR | MFČR | Letenská 15, 118 10 Praha 1 | [sporicidluhopisy\(zavinac\)mfcz.cz](mailto:sporicidluhopisy(zavinac)mfcz.cz) |  +420 257 041 111  | IČ: 000069

R Spořicí ...

 Překladač Google ...

 6 Microsoft Office...

 Simkovi [Jen pro č...

 Přihlášení - Kurz II ...

 Jamila Radova - D

a

Úrokové sazby

Tabulka č. 1 – výnos 1letého diskontovaného spořicího státního dluhopisu

Období	1 Diskontovaný
11. 11. 2011 – 12. 11. 2012	2,00 %

Zdroj: MF – odbor 20 – Řízení státního dluhu a finančního majetku, publikováno 15.09. 2011

Tabulka č. 2 – výnosy 5letého kuponového a reinvestičního spořicího státního dluhopisu

Období	5 Kuponový	5 Reinvestiční
11. 11. 2011 – 11. 11. 2012	0,85 %	0,85 %
11. 11. 2012 – 11. 11. 2013	1,50 %	1,50 %
11. 11. 2013 – 11. 11. 2014	3,00 %	3,00 %
11. 11. 2014 – 11. 11. 2015	4,50 %	4,50 %
11. 11. 2015 – 11. 11. 2016	6,00 %	6,00 %

Zdroj: MF – odbor 20 – Řízení státního dluhu a finančního majetku, publikováno 15.09.2011

- Jaká je výnosnost státního diskontovaného dluhopisu

- $i = m \cdot [(K_t / K_0)^{1/m \cdot n} - 1]$

$$i = (1000/980) - 1 = 2,04\%$$

- Kolik obdržíme z reinvestičního dluhopisu na konci 5. roku?
- $30\ 000 * 1,0085 * 1,015 * 1,03 * 1,045 * 1,06$
- $= 35036,65$
- Jaká je průměrná výnosnost reinvestičního dluhopisu?
- $5036,65 / (30000 * 5) = 3,3577\%$

- Kolik obdržíme z kupónového dluhopisu na konci 5. roku?
- $30000 * 1,0085 + 30000 * 1,015 + 30000 * 1,03 + 30000 * 1,045 + 30000 * 1,06$
- $= 255 + 450 + 900 + 1350 + 1800$
- $= 34755$
- Jaká je průměrná výnosnost kuponového dluhopisu? 3,17

Smíšené úročení

- jde o zrušení předpokladu, že doba splatnosti musí být celé číslo
- je to kombinace jednoduchého a složeného úročení
- úroky jsou po určité době připisovány k počátečnímu vkladu a s ním dále úročeny (složené úročení)
- vypočítat úrok za období kratší než úrokové období (jednoduché úročení)

Necht' počáteční kapitál K_0 je uložen na dobu n , kdy n je kladné, ale není celé číslo \rightarrow
lze vždy n zapsat takto:

$$n = [n] + (n - [n])$$

Kde:

$[n]$ je celá část čísla n , značí počet ukončených období, kdy je kapitál uložen

$n - [n]$ je desetinná část čísla n , značí necelou část jednoho období

$$(n - [n]) < 1$$

Kapitál na konci celých $[n]$ období se úročí složeně, tedy:

$$K_{[n]} = K_0 \cdot (1 + i)^{[n]}$$

Konečný stav kapitálu K_n je kapitál na konci $[n]$ celých období $K_{[n]}$ jednoduše zúročený na zbytek $(n - [n])$ období, tedy:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^{[n]} \cdot \{1 + (n - [n]) \cdot i\}$$

Poznámka:

Nezapomenout upravit úrokovou míru tak, aby odpovídala délce období.

Příklad:

Kolik činí splatná částka, je-li uloženo 30 tis.

Kč na 3 roky a 8 měsíců při neměnné úrokové sazbě 5,5% p.a.. Úrokové období je: a) roční
b) pololetní a c) čtvrtletní.

Řešení:

$$\begin{aligned} \text{a) } K_n &= 30\text{tis.} \cdot (1 + 0,055)^3 \cdot (1 + 0,055 \cdot 8/12) \\ &= 36518,91 \text{ Kč} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } K_n &= 30\text{tis.} \cdot (1 + 0,055/2)^{3 \cdot 2 + 1} \cdot (1 + (0,055/2) \cdot (2/6)) \\ &= 36606,40 \text{ Kč} \end{aligned}$$

$$c) K_n = 30\text{tis.} \cdot (1 + 0,055/4)^{3 \cdot 4 + 2} \cdot (1 + (0,055/4) \cdot (2/3))$$

$$= 36\,653,57 \text{ Kč}$$

$$d) K_n = 30\text{tis.} \cdot (1 + 0,055/4)^{(3 \cdot 12 + 8)/3}$$

$$= 36\,652,81 \text{ Kč}$$

$$c) - d) = 0,76 \text{ Kč}$$