Finanční matematika

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Spojité úročení

- Doposud při výpočtu stavu kapitálu na konci doby uložení byl proveden za (tacitního) předpokladu, že četnost připisování úroku za 1 rok m je konečné číslo → délka jednoho období je jednoznačně stanovena (1/m je reálné číslo)
- Pokud délka jednoho úrokového období se blíží k nule, tedy četnost připisování úroku za 1 rok se přibližuje k nekonečnu → jde o spojité úročení

- Stav kapitálu při spojitém úročení:

$$K_n = \lim_{m \to \infty} K_0.(1 + i/m)^{m.n}$$

$$= K_0.\lim_{m \to \infty} [(1 + i/m)^{(m.i/i)n}]$$

$$= K_0.\lim_{m \to \infty} [(1 + i/m)^{(m/i)}]^{(i.n)}$$

Položme $i/m = x$, protože $m \to \infty$, pak $x \to 0$

a $m/i = 1/x \to \infty$

Víme, že $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$, kde e je

Eulerovo číslo (e = 2,718…), potom

$$K_n = K_0.e^{i.n}$$

Efektivní úroková sazba

- Při rovnosti nominálních ročních úrokových sazeb je pro vkladatele výhodnější vyšší četnost připisování úroků za 1 rok
- Stejný finanční efekt je zajištěn tehdy, když je roční úroková sazba při ročním úrokovacím období vyšší než roční úroková sazba při kratším úrokovém období (vyšší četnost připisování úroků)

Efektivní úroková sazba

- Efektivní úroková sazba je roční úroková sazba, která zaručuje stejnou budoucí hodnotu při ročním úrokovém období za 1 rok jako roční úroková sazba s vyšší četností připisování úroků za 1 rok
- Slouží k porovnávání různých úrokových sazeb s různou četností připisování úroků

Odvození

- Nechť

  K_0 je současná hodnota kapitálu

  i_e je efektivní úroková míra

  i je roční úroková sazba

  m je četnost připisování úroků za 1 rok

- Vycházíme z definice efektivní úrokové sazby, platí tedy $K_0.(1 + i_e) = K_0.(1 + i/m)^m$

Úpravou dostaneme:

$$i_e = (1 + i/m)^m - 1$$

Úroková intenzita

- Efektivní úroková sazba u spojitého úročení - úroková intenzita
- Z definice musí platit:

$$K_0.(1 + i_e) = K_0.e^i$$

Úpravou opět dostaneme:

$$i_e = e^i - 1$$

Kde *e* je Eulerovo číslo

- Příklad:

  Jaká bude budoucí hodnota kapitálu za rok a efektivní úroková sazba, když počáteční částka 1 mil. Kč byla uložena při úrokové sazbě 8% p.a.a úroky jsou připisovány: a) ročně, b) pololetně, c) čtvrtletně, d) měsíčně, e) týdně, f) každou hodinu, g) každou minutu, h) každou sekundu, i) každý nekonečně malý okamžik

Řešení:

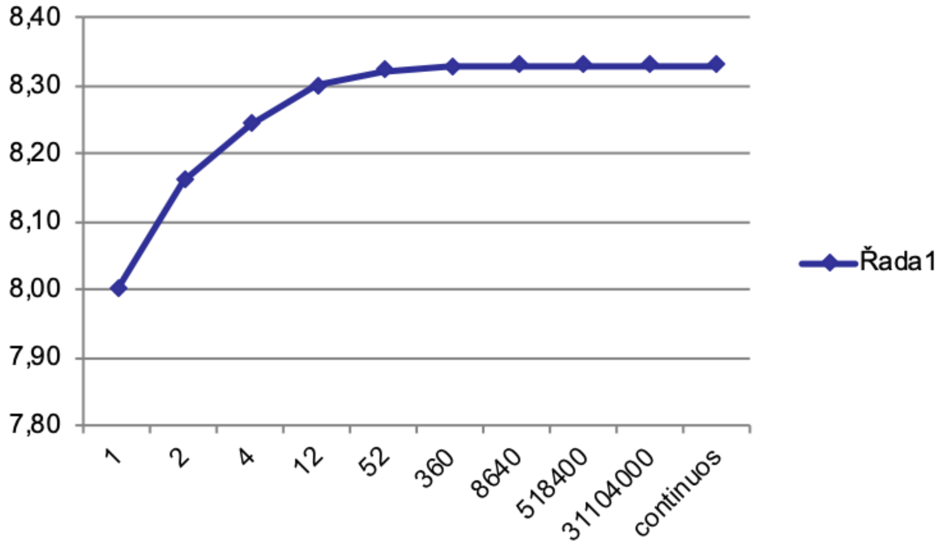
m	K / Kč	i_e / %
1	1080000	0,08000=8%
2	1081600	0,08160=8,16
4	1082432	0,08243=8,24
12	1083000	0,08300=8,30
52	1083220	0,08322=8,32
360	1083277	0,08328=8,33
8640	1083287	0,08329=8,33
518400	1083287	0,08329=8,33
31104000	1083287	0,08329=8,33
∞	1083287	0,08329=8,33

Zdroj: Autor

Grafické znázornění

závislost efektivní úrokové sazby na četnosti úročenig

1	8,00
2	8,16
4	8,24
12	8,30
52	8,32
360	8,33
8640	8,33
518400	8,33
31104000	8,33
continuos	8,33



Zdroj: Autor

Příklad:

- Chcete si uložit peníze a máte možnost zvolit si ze dvou bank:
  - banka A nabízí úrokovou sazbu 13 % p.a. s denním připisováním úroků,
  - banka B nabízí úrokovou sazbu 13,5 % p.a. s půlročním úročením

Příklad:

Kolik musí být roční úroková sazba při spojitém úročení, aby byla stejně výhodná pro vkladatele jako úroková sazba 7,5 % p.a. s pololetním úrokovacím obdobím?

Řešení:

$$e^{i_s} - 1 = (1 + 0{,}075/2)\text{^}2 - 1$$

$$i_s = 0{,}07363$$

Hrubá a čistá úroková míra

- Doposud jsme nebrali v úvahu zdanění
- Úroky (úrokové příjmy) obvykle podléhají zdanění, úrok před zdanění je hrubý výnos, po zdanění je čistý výnos
- Sazby zdanění mohou být rozdílné pro různé subjekty
- Nechť *tax* je daňová sazba z úrokových příjmů, označení ostatních veličin je nezměněné

- Hrubý výnos:

$$u = K_0.i.t$$

- Čistý výnos:

$$u_č = K_0.i.t - \mathit{tax}.K_0.i.t = (1 - \mathit{tax}).K_0.i.t$$

- Čistá budoucí hodnota:

$$K_{tč} = K_0 + u_č = K_0 + (1 - \mathit{tax}).K_0.i.t$$

Kde

$K_{tč}$ je čistá budoucí hodnota

Čisté budoucí hodnoty

Jednoduché úročení

$$\boldsymbol{K_{t_č} = K_0.(1 + (1 - tax).i.t)}$$

Složené úročení

$$\boldsymbol{K_{n_č} = K_0.(1 + (1 - tax).i)^n}$$

nebo $\boldsymbol{K_{n_č} = K_0.(1 + (1 - tax).i/m)^{m.n}}$

Smíšené úročení

$$K_{n_č} = K_0.(1 + (1 - tax).\mathrm{i})^{[n]}.\{1 + (n - [n])(1 - tax).\mathrm{i}\}$$

Poznámka: člen $(1 - tax).i$ je čistá úroková míra

- Příklad:

  Za 2 roky a 7 měsíců byste rádi měli na účtu částku 45 000 Kč. Kolik musíte dnes uložit do banky při úrokové sazbě 5,4 % p.a. s pololetním připisováním úroků. Úroky podléhají 15-ti procentní srážkové dani.

Řešení:

$$K_0 = 45000/\{(1 + 0{,}85.0{,}054/2)^5 . (1 + 0{,}85.0{,}054.1/12)\} = 40020{,}50 \text{ Kč}$$

- Příklad:

  Při jaké nominální (roční) úrokové sazbě byl uložen vklad 150 000 Kč, jestliže za 3 roky jeho hodnota vzrostla na částku 168 057 Kč? Úroky byly připisovány dvakrát ročně, ponechány na účtu a dále úročeny stejnou úrokovou sazbou. Při připisování úroku byla vždy okamžitě sražena daň z úroků ve výši 15 %.

Řešení:

$$168\,057 = 150\,000.(1 + (1 - 0{,}15).i/2)^6$$

$$I = 4{,}5\% \text{ (p.a.)}$$

Nominální vs. reálná úroková sazba

- Doposud jsme hovořili jen o nominálních úrokových sazbách, nebrali v úvahu inflaci
- Inflace je zvýšení (změna) cenové hladiny, resp. Snížení (změna) kupní síly peněz, → zahrnutí inflace do úrokové sazby → reálná úroková míra
- Měření inflace: deflátor HDP, CPI, PPI

- Reálná úroková sazba je nominální úroková sazba očištěná od inflace
- Nominální úroková sazba udává o kolik procent vzroste uložená částka za 1 období
- Reálná úroková sazba udává o kolik procent zboží/služeb můžeme koupit více, pokud nějakou částku uložíme na jedno období, na jeho konci vybereme tuto částku spolu s úrokem a koupíme za ně zboží/služby

Vztah mezi nominální a reálnou úrokovými sazbami

Nechť

K_0 je počáteční částka, na začátku období, uložená na 1 období

K_1 je budoucí hodnota částky na konci toho období

i je nominální úroková sazba

r je reálná úroková míra

P_0 je cenová hladina na začátku období

P_1 je cenová hladina na konci období

Platí:

pro uloženou částku K_0 při nominální i

$$K_1 = K_0.(1 + i)$$

pro reálnou částku K_0/P_0 při reálné r

$$K_1/P_1 = K_0/P_0.(1 + r)$$

$$\rightarrow 1 + r = (K_1/P_1)/(K_0/P_0)$$

Další úpravou

$$(K_1/K_0)/(P_1/P_0) = (K_1/K_0)/\{[P_0 + (P_1 - P_0)]/P_0\}$$

Protože

$$\pi = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

$$1 + r = (1 + i)/(1 + \pi)$$

Výpočet reálné výše kapitálu

- Nechť K_0 je částka uložena na dobu 1 roku při nominální úrokové sazbě i, míra inflace za ten rok je π
- Reálná částka na konci roku bude

$$K_r = K_0.(1 + r) = K_0.[(1 + i)/(1 + \pi)]$$

$$\approx K_0.[1 + (i - \pi)]$$

Další vzorce spojené s inflací

- Nechť

P_0 je cena /cenová hladina zboží /služeb na počátku období 1

P_k je cena /cenová hladina zboží /služeb na konci období k

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ jsou míry inflace v jednotlivých letech od 1 do k,

Pak

$$P_k = P_0.(1 + \pi_1).(1 + \pi_2)\dots(1 + \pi_k)$$

Další

Nechť

K_0 je počáteční částka

$i_1, i_2, \ldots, i_k$ jsou nominální úrokové míry v jednotlivých letech od 1 do k,

$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ jsou míry inflace v jednotlivých letech od 1 do k,

K_{k_r} je reálná částka na konci období k

$$K_{k_r} = K_0.(1 + i_1)\ldots(1 + i_k)/(1 + \pi_1)\ldots(1 + \pi_k)$$

$$\approx \quad K_0.\Pi_1^{\,k}\,[1 + (i_j - \pi_j)]$$

Současný vliv daně a inflace

- Nechť

  tax je daňová sazba z úrokových příjmů

  K_0 je částka uložena na dobu 1 roku

  i je nominální úroková sazba,

  π je míra inflace za uplynulý rok

Reálná částka K_r na konci roku bude

$$K_r = K_0.(1 + r) = K_0.[1+(1 - tax)i]/(1+ \pi)$$

$$\approx K_0.[1 + (1 - tax)i - \pi]$$

Pro k období

Nechť

tax je daňová sazba z úrokových příjmů

K_0 je počáteční částka

$i_1, i_2, \ldots, i_k$ jsou nominální úrokové míry v jednotlivých letech od 1 do k,

$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ jsou míry inflace v jednotlivých letech od 1 do k,

K_{k_r} je reálná částka na konci období k

$$K_{k_r} = K_0.[1+(1-tax).i_1]\ldots[1+(1-tax).i_k]/[(1+\pi_1)\ldots(1+\pi_k)]$$

$$\approx \quad K_0.\Pi_1^{\,k}\,[1 + (1 - tax)i_j - \pi_j]$$

- Příklad:

  Jakou nominální úrokovou sazbu musí komerční banka nabízet svým klientům, kteří mají u banky termínovaný vklad, aby reálně zhodnotili své úspory 3,5 % ročně? Daň z úroků je 15 % a očekávaná inflace 2,1 %.

Řešení:

$$i = [(1 + r).(1 + \pi) – 1]/0.85$$

$$= [1,035 . 1,021 - 1]/0.85 = 0.0667\ (6,67\%)$$

- Příklad:

  Jaké průměrné reálné roční výnosnosti dosáhl klient k 1.1.2005, když dne 1.1.2003 uložil částku 250 000 Kč na termínovaný účet při (nominální) úrokové sazbě 3,0% p.a. v prvním roce a kapitál včetně úroků ve druhém roce byl úročen úrokovou sazbou 4,5% p.a.? Míra inflace v prvním roce byla 0,5% a ve druhém roce byla 2,8%. Úroky z vkladů podléhají dani z příjmů, vybírané srážkou ve výši 15 %.

- Řešení:

$$K_2^{č} = 250000.[(1+0{,}85.0{,}03).(1 + 0{,}85.0{,}045)]/$$
$$/[(1 + 0{,}005).(1 + 0{,}028)]$$
$$= 257643{,}05 \text{ Kč}$$

$$r = (K_2^{č}/K_0)^{1/2} - 1 = 1{,}517\%$$

1,528