

# FINANČNÍ MATEMATIKA



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

**MŠMT**  
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

# Budoucí hodnota anuity

## Spoření

- Doposud
  - budoucí hodnoty či současné hodnoty, za předpokladu jednorázové hodnoty
- Nyní
  - výpočty budoucích hodnot za předpokladu, že se ukládá v pravidelných intervalech neměnná částka, tj. spoření

# Členění spoření

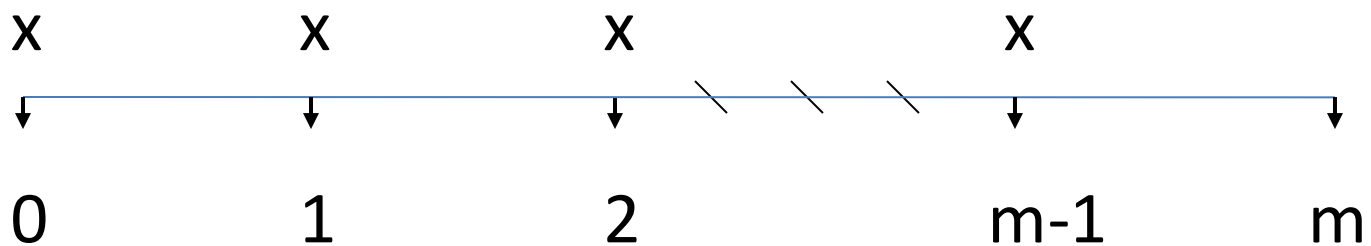
- Krátkodobé:
  - ukládá se pravidelně během 1 období,
  - úroky budou připisovány na konci období,
  - úložky jsou úročeny jednoduše
- Dlouhodobé:
  - doba spoření je delší než jedno období
  - úroky jsou na konci každého období přičteny k naspořené částce

# Krátkodobé spoření

- Necht'
  - úroky jsou připisovány najednou na konci úrokového období
  - ukládá se stejná částka pravidelně  $m$ -krát za jedno období
  - částky jsou úročeny jednoduše
  - 2 typy krátkodobého spoření: *předlhůtní*, *polhůtní*

# Krátkodobé spoření předlhůtní

- Necht' na počátku každé  $m$ -tiny jednoho období je ukládána částka  $x$  korun při úrokové sazbě  $i$  % odpovídající danému období.
- Za toto období bude ukládáno celkem  $m$  krát částky ve výši  $x$ :



Úložka číslo	Doba uložení	Budoucí hodnota úložky
1	$m/m$	$x.(1 + i.m/m)$
2	$(m - 1)/m$	$x.(1 + i.(m - 1)/m)$
3	$(m - 2)/m$	$x.(1 + i.(m - 2)/m)$
...	...	...
m	$1/m$	$x.(1 + i.1/m)$

Celková naspořená částka  $S'_1$  za období je:

$$S'_1 = m * x + x * \frac{i}{m} [m + (m - 1) + (m - 2) + \dots + 1]$$

protože

$$[m + (m - 1) + (m - 2) + \dots + 1] = \frac{(m + 1) * m}{2}$$

$$S'_1 = m * x * \left( 1 + \frac{m + 1}{2 * m} * i \right)$$

Kde  $x$  je výše jedné úložky,  $m$  je počet úložek za 1 období,  $i$  je úroková sazba odpov. období

Úložka číslo	Doba uložení	Budoucí hodnota úložky - předl	Budoucí hodnota úložky - polh	
1	$m/m$	$x.(1 + i.m/m)$		
2	$(m - 1)/m$	$x.(1 + i.(m - 1)/m)$	$x.(1 + i.(m - 1)/m)$	1
3	$(m - 2)/m$	$x.(1 + i.(m - 2)/m)$	$x.(1 + i.(m - 2)/m)$	2
4			$x.(1 + i.(m - 3)/m)$	3
...	...	...	...	...
m	$1/m$	$x.(1 + i.1/m)$	$x.(1 + i.1/m)$	m-1
			X	m

Zdroj: Autor



## Příklad:

Jaká bude naspořená částka na konci roku, když se bude ukládat na počátku každého měsíce 1500 Kč při úrokové sazbě 4,5% p.a.. Úroky jsou připisovány ročně.

## Řešení:

$$S' = 1500 * 12 * \left( 1 + \frac{12 + 1}{2 * 12} * 0,045 \right)$$

$$S' = 18438,75 \text{ Kč}$$

## Příklad:

Jaká bude naspořená částka na konci roku, když se bude ukládat koncem každého měsíce 1500 Kč při úrokové sazbě 4,5% p.a.. Úroky jsou připisovány ročně.

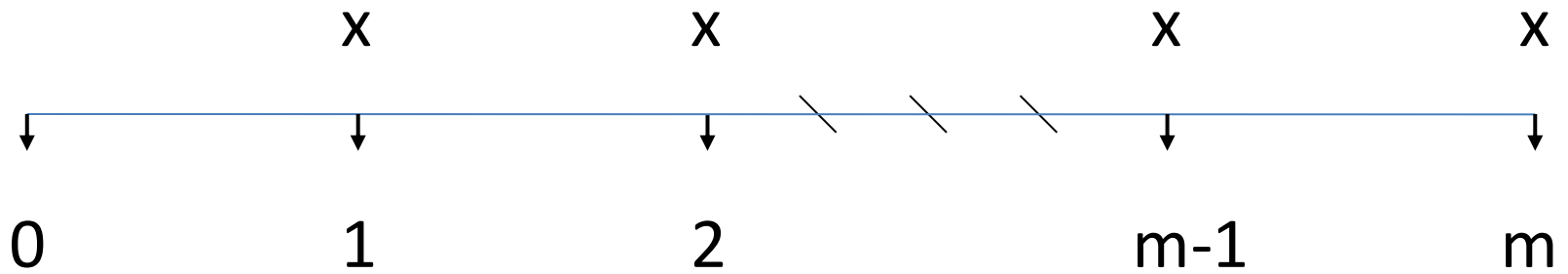
## Řešení:

$$S_1 = 1500 * 12 * \left( 1 + \frac{12 - 1}{2 * 12} * 0,045 \right)$$

$$S_1 = 18.371,25 \text{ Kč}$$

# Krátkodobé spoření polhůtní

- Necht' na konci každé  $m$ -tiny jednoho období je ukládána částka  $x$  korun při úrokové sazbě  $i$  % odpovídajícího. období
- Za jedno období bude ukládáno celkem  $m$  krát částky ve výši  $x$



Úložka číslo	Doba uložení	Budoucí hodnota úločky
1	$(m - 1)/m$	$x \cdot (1 + i \cdot (m - 1)/m)$
2	$(m - 2)/m$	$x \cdot (1 + i \cdot (m - 2)/m)$
3	$(m - 3)/m$	$x \cdot (1 + i \cdot (m - 3)/m)$
...	...	...
m	$0/m$	x

Celková naspořená částka  $S_1$  za období je:

$$\begin{aligned} S_1 &= x * \left( 1 + i * (m - 1) * \frac{1}{m} \right) + x * \left( 1 + i * (m - 2) * \frac{1}{m} \right) + \\ &\quad + x * \left( 1 + i * (m - 3) * \frac{1}{m} \right) + \dots + x \\ &= x * \left\{ m + \frac{i}{m} * [(m - 1) + (m - 2) + (m - 3) + \dots + 0] \right\} \end{aligned}$$

protože

$$[(m - 1) + (m - 2) + (m - 3) + \dots + 0] = \frac{(m - 1) * m}{2}$$

$$S_1 = x \left[ m + \frac{i}{m} * \frac{(m - 1) * m}{2} \right] = m * x * \left[ 1 + \frac{(m - 1) * i}{2 * m} \right]$$

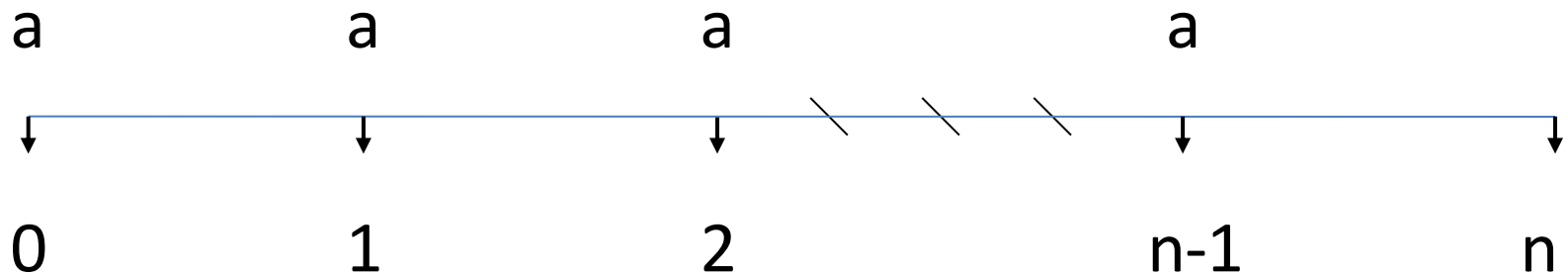
Kde  $x$  je výše jedné úložky,  $m$  je počet úložek za 1 období,  $i$  je úroková sazba odpov. období

# Dlouhodobé spoření

- Spoří se více než jedno období
- Pro začátek se předpokládá, že spoří se jednou za období
- Podle okamžiku uložení se opět dělí na:  
*předlhůtní a polhůtní*

# Dlouhodobé spoření předlhůtní

- Necht' je na počátku každého období ukládána částka  $a$  při úrokové sazbě  $i$  % (která se nemění) odpovídající délce období po dobu  $n$  období



Úložka číslo	Doba uložení	Budoucí hodnota předlhůtní	Budoucí hodnota polhůtní	
1	n	$a \cdot (1 + i)^n$		
2	n - 1	$a \cdot (1 + i)^{n - 1}$	$a \cdot (1 + i)^{n - 1}$	1
3	n - 2	$a \cdot (1 + i)^{n - 2}$	$a \cdot (1 + i)^{n - 2}$	2
...	...	...	$a \cdot (1 + i)^{n - 3}$	3
n	1	$a \cdot (1 + i)^1$	$a \cdot (1 + i)^1$	n-1
			$a \cdot (1 + i)^0$	n



Celková naspořená částka  $S'_n$  za  $n$  období je:

$$\begin{aligned} S'_n &= a * (1+i)^n + a * (1+i)^{n-1} + a * (1+i)^{n-2} + \dots + a * (1+i)^1 \\ &= a * (1+i) * \left[ (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \dots + 1 \right] \end{aligned}$$

Protože  $\left[ (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \dots + 1 \right]$

je geometrická řada s  $a_1 = a * (1+i)$  a

kvocientem  $q = 1+i$ , jejich součet je:

$$S = \frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1}$$

$$S'_n = a * (1 + i) * \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Poznámka: člen  $s'_n = (1 + i) * \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$  se

nazývá střadatel předlhůtní a udává, kolik se naspoří za n období při úrokové sazbě  $i$ , pokud se na počátku každého období ukládá částka

1 Kč

Celková naspořená částka  $S_n$  za  $n$  období je:

$$\begin{aligned} S_n &= a * (1 + i)^{n-1} + a * (1 + i)^{n-2} + a * (1 + i)^{n-3} + \dots + a \\ &= a * \left[ (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-3} + \dots + 1 \right] \end{aligned}$$

Protože  $\left[ (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-3} + \dots + 1 \right]$

je geometrická řada s  $a_1 = a$  , kvocientem

$q = 1 + i$  , jejich součet je:

$$S = \frac{(1 + i)^n - 1}{1 + i - 1}$$

$$S_n = a * \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Poznámka: člen  $s_n = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$  se nazývá

střadatel polhůtní a udává, kolik se naspoří za  $n$  období při úrokové sazbě  $i$ , pokud se na konci každého období ukládá částka 1 Kč

Ze dvou vzorců pro střadatele je zřejmé, že musí

platit:

$$s'_n = (1 + i) * s_n$$

## Příklad:

Kolik naspoří klient za 8 let, když počátkem každého roku ukládá 15 000 Kč na svůj spořicí účet při úrokové sazbě 5,5% p.a.?

## Řešení:

$$S'_8 = 15000 * (1 + 0,055) * \frac{(1 + 0,055)^8 - 1}{0,055}$$

$$S'_8 = 153843,90 \text{ Kč}$$

## Příklad:

Kolik naspoří klient za 8 let, když koncem každého roku ukládá 15 000 Kč na svůj spořicí účet při úrokové sazbě 5,5% p.a.?

## Řešení:

$$S_8 = 15000 * \frac{(1 + 0,055)^8 - 1}{0,055}$$

$$S_8 = 145823,60 \text{ Kč}$$

## Příklad:

Jaká částka se musí ukládat počátkem každého roku při úrokové sazbě 6% p.a., aby za 10 byla na účtu částka 100 000 Kč?

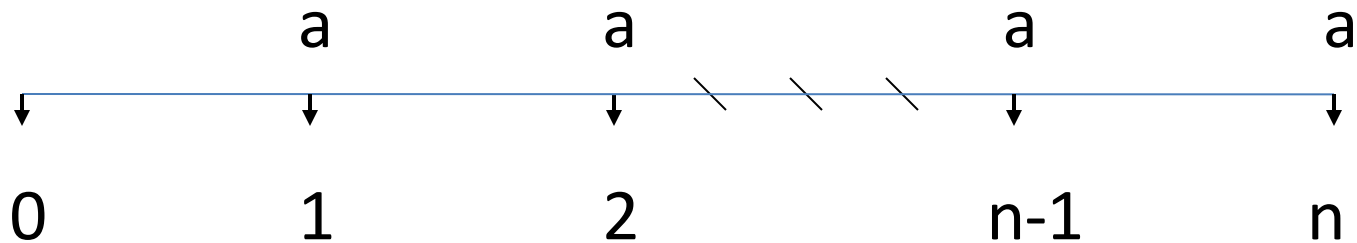
## Řešení:

$$100000 = x * (1 + 0,06) * \frac{(1 + 0,06)^{10} - 1}{0,06}$$

$$x = 7.157,35 \text{ Kč}$$

# Dlouhodobé spoření polhůtní

- Necht' je na konci každého období ukládána částka  $a$  při úrokové sazbě  $i\%$  odpovídající délce období po dobu  $n$  období





Úložka číslo	Doba uložení	Budoucí hodnota úložky
1	$n - 1$	$a \cdot (1 + i)^{n - 1}$
2	$n - 2$	$a \cdot (1 + i)^{n - 2}$
3	$n - 3$	$a \cdot (1 + i)^{n - 3}$
...	...	...
n	0	a.

Celková naspořená částka  $S_n$  za  $n$  období je:

$$\begin{aligned} S_n &= a * (1 + i)^{n-1} + a * (1 + i)^{n-2} + a * (1 + i)^{n-3} + \dots + a \\ &= a * \left[ (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-3} + \dots + 1 \right] \end{aligned}$$

Protože  $\left[ (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-3} + \dots + 1 \right]$

je geometrická řada s  $a_1 = a$  , kvocientem

$q = 1 + i$  , jejich součet je:

$$S = \frac{(1 + i)^n - 1}{1 + i - 1}$$

$$S_n = a * \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Poznámka: člen  $s_n = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$  se nazývá

střadatel polhůtní a udává, kolik se naspoří za  $n$  období při úrokové sazbě  $i$ , pokud se na konci každého období ukládá částka 1 Kč

Ze dvou vzorců pro střadatele je zřejmé, že musí

platit:

$$s'_n = (1 + i) * s_n$$

## Příklad:

Za kolik let uspoříme částku 250 000 Kč při ročním polhůtním ukládání 15 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 4% p.a.?

Předpokládáme roční připisování úroků.

## Řešení:

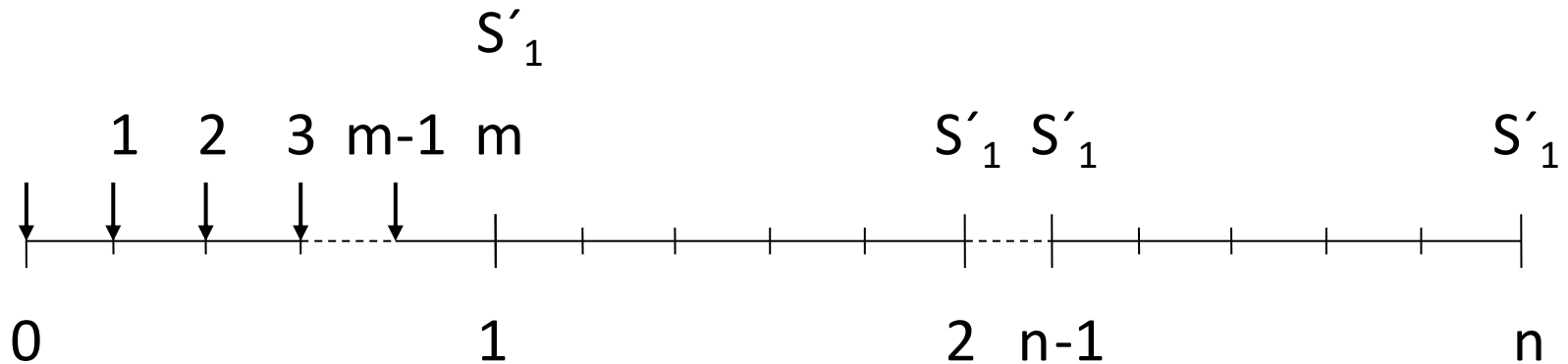
$$n = \frac{\ln(1 + S * \frac{i}{a})}{\ln(1 + i)}$$

$$n = 13let$$

# Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření

- Necht' bude spořit  $n$  období a během jednoho období se bude ukládat  $m$ -krát částka  $x$  při úrokové sazbě  $i$
- dle okamžiku uložení v jedné  $m$ -tině jednoho období se dělí na: *předlhůtní a polhůtní*

# Kombinace s předlhůtním ukládáním



Nechť bude spořit  $n$  období a během jednoho období se bude ukládat  $m$ -krát částka  $x$  na počátku každé  $m$ -tiny období

Na konci každého období bude naspořena částka  $S'_1$  (s využitím vzorce pro krátkodobé spoření předlhůtní):

$$S'_1 = m * x * \left( 1 + \frac{m+1}{2 * m} * i \right)$$

Částka naspořená na konci  $n$ -tého období bude  $S'_n$  rovna budoucí hodnotě ze spoření, kdy se ukládá na konci každého období částka  $S'_1$  po dobu  $n$  období při sazbě  $i$ , tj.

$$S'_n = S'_1 * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = m * x * \left( 1 + \frac{m+1}{2 * m} * i \right) * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

## Příklad:

Kolik se uspoří za 5 let, spoří-li začátkem každého měsíce 2500 Kč při neměnné roční úrokové sazbě 4,2%? Předpokládá se pololetní připisování úroků.

## Řešení:

$$S'_{10} = 6 * 2500 * \left(1 + \frac{6+1}{2*6} * 0,021\right) * \frac{(1 + 0,021)^{10} - 1}{0,021}$$

$$S'_{10} = 167.019,95 \text{ Kč}$$



## Příklad:

Kolik se musí spořit počátkem každého druhého měsíce, aby se za deset let uspořilo 500000 Kč při neměnné roční úrokové sazbě 4,5 % a pololetním připisování úroků?

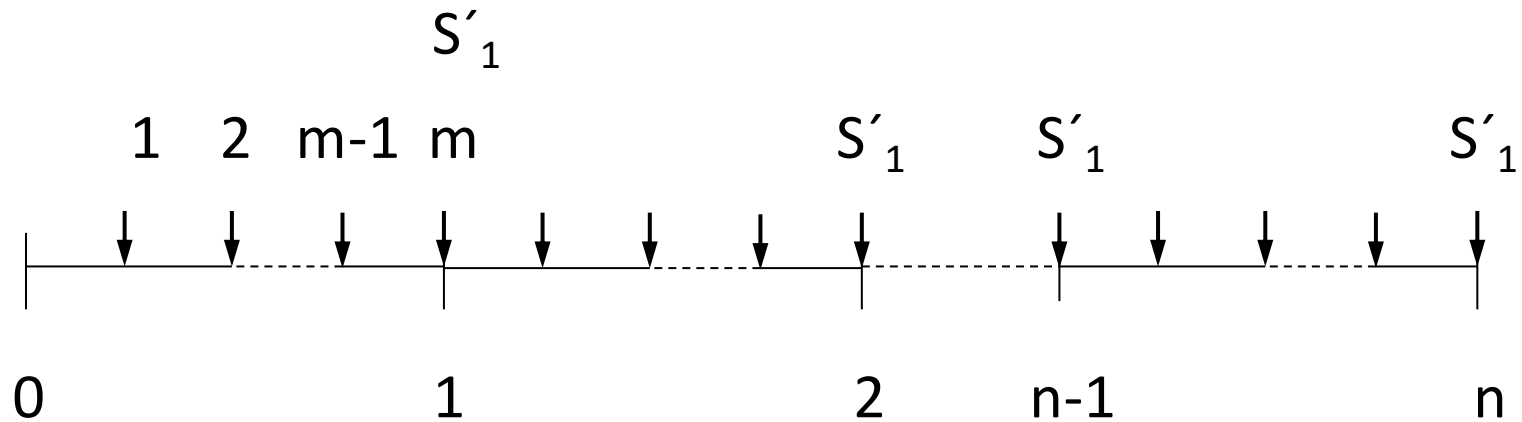
## Řešení:

$$500000 = 3 * x * \left( 1 + \frac{3+1}{2*3} * \frac{0,045}{2} \right) * \frac{\left( 1 + \frac{0,045}{2} \right)^{20} - 1}{\frac{0,045}{2}}$$

$$x = 2.844,38 \text{ Kč}$$

# Kombinace s polhůtním ukládáním

Nechť se bude spořit  $n$  období a během jednoho období se bude ukládat  $m$ -krát částka  $x$  na konci každé  $m$ -tiny období při úrokové sazbě  $i$



Na konci každého období bude naspořena částka  $S_1$  (s využitím vzorce pro krátkodobé spoření polhůtní):

$$S_1 = m * x * \left( 1 + \frac{m-1}{2 * m} * i \right)$$

Částka naspořená na konci  $n$ -tého období bude  $S_n$  rovna budoucí hodnotě ze spoření, kdy se ukládá na konci každého období částka  $S_1$  po dobu  $n$  období při sazbě  $i$ , tj.

$$S_n = S_1 * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = m * x * \left( 1 + \frac{m-1}{2 * m} * i \right) * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

## Příklad:

Jaká částka se musí ukládat koncem každého čtvrtletí, aby se za osmnáct let uspořilo 1000000 Kč při neměnné roční úrokové sazbě 3,5 % a ročním připisování úroků?

## Řešení:

$$1.000.000 = 4 * x * \left( 1 + \frac{4-1}{2*4} * 0,035 \right) * \frac{(1 + 0,035)^{18} - 1}{0,035}$$

$$x = 10.072 \text{ Kč}$$

## Příklad:

Kolik budeme mít k dispozici na účtu na konci roku, jestliže jsme na počátku roku uložili částku 10 000 Kč a koncem každého měsíce spoříme na tento účet 1000 Kč? Úroková sazba je 2,5 % p.a. s pololetním připisováním úroků.

## Výsledek:

$$10.251,56 + 12.137,89 = 22.389,45 \text{ Kč}$$

# Zdanění úroků u spoření

## Krátkodobé spoření:

Nechť  $tax$  je daňová sazba

Budoucí hodnota bez zdanění je:

$$S = m * x * \left( 1 + \frac{m \pm 1}{2 * m} * i \right)$$

Daň z úroků je:

$$D = tax * \frac{m \pm 1}{2 * m} * i$$

Čistá budoucí hodnota:

$$S_{\check{c}} = S - D = m * x * \left[ 1 + (1 - tax) * i * \frac{m \pm 1}{2 * m} \right]$$

## Dlouhodobé spoření se zdaněním:

Čistá budoucí hodnota je:

$$S_n = a * \left\{ \frac{[1 + (1 - tax) * i]^n - 1}{i * (1 - tax)} \right\}$$

## Kombinace dvou typů spoření se zdaněním:

Čistá budoucí hodnota je:

$$S_n = m * x * \left[ 1 + \frac{m \pm 1}{2 * m} * (1 - tax) * i \right] * \frac{[1 + (1 - tax) * i]^n - 1}{i * (1 - tax)}$$

## Příklad:

Jaká částka se naspoří za 10 let, pokud se ukládá počátkem každého čtvrtletí 2 500 Kč při úrokové míře 4,2 % p.a. s ročním úročením. Úroky jsou zdaněny srážkovou daní ve výši 15%.

## Řešení:

$$S = 4 * 2500 * \left(1 + \frac{4 + 1}{2 * 4} * 0,042 * 0,85\right) * \frac{(1 + 0,85 * 0,042)^{10} - 1}{0,042 * 0,85}$$

$$S = 120.320,20 \text{ Kč}$$



## Příklad:

Jaká částka byla uložena před **10 lety** na účet, když dnes je na účtu **150 000 Kč** a přitom byla během těchto 10 let **koncem každého měsíce** ukládána částka **500 Kč**. Účet je úročen úrokovou sazbou **4,8 % p.a.** s **pololetním připisováním úroků**, které byly **daněny 15-ti procentní srážkovou daní**.

## Řešení:

$$150.000 = x * (1 + 0,85 * 0,024)^{20} + 500 * 6 *$$

$$* (1 + \frac{5}{12} * 0,85 * 0,024) * [(1 + 0,85 * 0,024)^{20} - 1] / 0,85 * 0,024$$

$$x = 50.876,39 K\check{c}$$

$$(S = 73.805,20 K\check{c})$$

# Poplatky

- 1. Poplatky častější než připisování úroků
- 2. Poplatky méně často než připisování úroků
- 3. Poplatky v úrokovém období
  
- poplatky předlhůtní - polhůtní

- O kolik se za 3 roky sníží majetek vlastníka běžného účtu, když mu banka připisuje úrok každé 3 měsíce a
- strhává poplatek 25 CZK na konci každého měsíce? Úroková sazba je 5%.

- Využijeme krátkodobé spoření - 75,31

$$S_1 = m * x * \left[ 1 + \frac{(m \pm 1) * i}{2 * m} \right]$$

- Pak dlouhodobé na přepoččet „ztráty“ –

$$968,54 \quad S_n = a * \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

- O kolik se sníží naspořená částka vlivem pravidelných výberu o velikosti 100 CZK jednou za pět let? K výběru
- dojde vždy na konci pětiletého období a po dobu 20 let. Úroková sazba je 5% a úrokové období je pololetní – dlouhodobé spoření – 8.93
- 601,6

- V úrokovém období - nejlehčí