

# Finanční matematika

## téma: umořování



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

**MŠMT**  
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

- Příklad:

Jakou částku je třeba dnes složit na účet, aby nám zajistila výplatu věčného měsíčního předlhůtního důchodu ve výši 8 500 Kč od pětadesáti let našeho věku, je-li nám dnes pětadvacet let a uvažujeme neměnnou úrokovou sazbu 5 % p.a. a půlroční úročení?

Řešení:

$$\begin{aligned} D &= 1,025^{-80} \cdot 8\,500 \cdot 6 \cdot (1 + 0,025 \cdot 7/12) / 0,025 \\ &= 287\,083,80 \text{ Kč} \end{aligned}$$

- Příklad:

Jakou částku by měl ukládat počátkem každého měsíce po dobu 25 let klient důchodového připojištění, aby si zajistil výplatu věčného měsíčního předlhůtního důchodu ve výši 10 000 Kč? Předpokládejme úrokovou sazbu 5,5% p.a. a čtvrtletní úročení po celou dobu kontraktu.

Řešení:  $S = D$

$$3 \cdot x \cdot (1 + (0,055/4) \cdot 7/12) \cdot (1,01375^{100} - 1) / 0,01375$$

$$= 3 \cdot 10\,000 \cdot (1 + (0,055/4) \cdot 7/12) / 0,01375$$

$$x = 3\,426,77 \text{ Kč}$$

# Splacení úvěru

- Úvěrem/půjčkou rozumíme poskytnutí peněžní částky na určitou dobu za odměnu zvanou úrok.
- dle doby splatnosti lze rozdělit úvěry na:
  - krátkodobé, kdy doba splatnosti  $n \leq 1$  rok;
  - střednědobé, kdy  $1 \leq n \leq 4$  (roky);
  - dlouhodobé, kdy  $n \geq 4$  (roky);

- Hlavní způsoby umořování úvěru:
  - najednou včetně úroků za určitou dobu.
  - najednou po výpovědi při zachování výpovědní lhůty
  - od začátku pravidelnými platbami (ne)stejně výše
    - Konstantním úmorem
    - Konstantní anuitou
    - Rostoucím/klesajícím úmorem
    - Rostoucí/klesající anuitou

# Umořovací plán

- Slouží k:
  - výpočtu a přehledu o výši jednotlivých plateb
  - odlišení úmoru a úroku za účelem správného zaúčtování
  - zjištění stavu dosud nesplaceného úvěru
- Liší se : způsobem úročení, obdobími splátek
- Obsahuje: výši anuity (splátky), výši úroku z úvěru, výši úmoru, zůstatek úvěru

# Splacení úvěru konstantní anuitou

- Necht' úvěr ve výši  $D$  je splacen  $n$  stejnými splátkami velikosti  $a$  na konci každého období při neměnné úrokové sazbě  $i$ . Výše úvěru se musí rovnat součtu současných hodnot  $n$  splátek, tedy:

$$D = a(1 + i)^{-1} + a(1 + i)^{-2} + \dots + a(1 + i)^{-n}$$

po úpravě výše jedné anuity bude:

$$a = D \cdot \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \quad (1)$$

- Člen  $\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$  se nazývá umořovatel a

udává výši polhůtní anuity nutné k tomu, aby se zaplatil jednotkový úvěr za  $n$  období při úrokové sazbě  $i$ . Z (1) lze odvodit vzorec pro výpočet doby splatnosti:

$$n = - \frac{\ln(1 - i \cdot D/a)}{\ln(1 + i)}$$

a pro velikost poslední splátky :

$$b = (D - a \cdot (1 - (1 + i)^{-[n]})) / i \cdot (1 + i)^{[n]+1}$$



- K sestavení umořovacího plánu je třeba znát: anuitu, úmor, úrok a nesplacenou jistinu v každém roce. Necht' úvěr  $D$  je splacen  $n$  anuitami a při úrokové sazbě  $i$ .

Úroková platba v 1. roce je:

$$U_1 = i.D = a.(1 - (1 + i)^{-n})$$

Úmor v 1. roce je:

$$M_1 = a - U_1 = a.(1 + i)^{-n}$$

Nesplacená jistina v 1. roce je:

$$D_1 = D - M_1 = a.(1 - (1 + i)^{-n+1})/i$$

Dalšími  $n - 1$  podobnými kroky získáme celý umořovací plán

# Umořovací plán

j	anuita	$U_j$	$M_j$	$D_j$
0				D
1	a	$a \cdot (1 - (1+i)^{-n})$	$a \cdot (1+i)^{-n}$	$a \cdot (1 - (1+i)^{-n+1}) / i$
2	a	$a \cdot (1 - (1+i)^{-n+1})$	$a \cdot (1+i)^{-n+1}$	$a \cdot (1 - (1+i)^{-n+2}) / i$
...	...	...	...	...
j	a	$a(1 - (1+i)^{-n+j-1})$	$a \cdot (1+i)^{-n+j-1}$	$a \cdot (1 - (1+i)^{-n+j}) / i$
...	...	...	...	...
n	a	$a \cdot i / (1 + i)$	$a / (1 + i)$	0

- Příklad:

Jak dlouho musíme splácet úvěr ve výši 500 000 Kč ročními anuitami velikosti 95 000 Kč při úrokové sazbě 9% p.a.. Určete také výši poslední splátky.

Řešení:

$$\begin{aligned}n &= -\ln(1 - 0,09 \cdot 500000 / 95000) / \ln(1,09) \\ &= 7,448 \text{ (8 let)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= (500000 - 95000 \cdot (1 - 1,09^{-7}) / 0,09) \cdot 1,09^8 \\ &= 43\,576,31 \text{ Kč}\end{aligned}$$

- Příklad:

Sestavme umořovací plán pro úvěr ve výši 1 mil. Kč splacený konstantní anuitou po dobu 8 let při úrokové sazbě 11% p.a..

Řešení:

$$a = 1\text{mil.} \cdot 0,11 / (1 - 1,11^{-8}) = 194\ 321\ \text{Kč}$$

$$U_1 = 0,11 \cdot 1\text{mil.} = 110\ 000\ \text{Kč}$$

$$M_1 = a - U_1 = 84\ 321\ \text{Kč}$$

$$D_1 = D - M_1 = 915\ 679\ \text{Kč}$$

Dále Excelem sestavíme celý umořovací plán

# Umořovací plán

j	anuita	$U_j$	$M_j$	$D_j$
0				1000000
1	194321	110000	84321	915679
2	194321	100725	93596	822083
3	194321	90429	103892	718191
4	194321	79001	115320	602871
5	194321	66316	128005	474865
6	194321	52235	142085	332779
7	194321	36606	157715	175064
8	194321	19257	175064	0

# Umořování dluhu stejnými úmory

- Necht' dluh ve výši  $D$  je umořován při úrokové sazbě  $i$   $n$  splátkami, jejichž výše se skládají z konstantního úmoru a úrokové platby.
- Výše úmoru je:  $M = D/n$
- Úroková platba v 1. roce je  $U_1 = i.D$
- Zbytek úvěru na konci 1. roku je

$$D_1 = D - M = (n - 1).M$$

# Umořovací plán s konst. úmory

j	Splátka	$U_j$	$M_j$	$D_j$
0				$D = n.M$
1	$(1 + i.n).M$	$i.D = i.n.M$	M	$(n - 1).M$
2	$(1 + (n - 1).i).M$	$i.(n - 1).M$	M	$(n - 2).M$
...	...	...	...	...
j	$(1 + (n - j + 1).i).M$	$i.(n - j + 1).M$	M	$(n - j).M$
...	...	...	...	...
n	$(1 + i).M$	$i.M$	M	0

- Příklad:

Sestavme umořovací plán pro úvěr ve výši 1 mil. Kč splacený konstantními úmory po dobu 8 let při úrokové sazbě 11% p.a..

Řešení:

Výše úmoru:  $M = D/8 = 125\ 000\ \text{Kč}$

Úroková platba v 1. roce:

$$U_1 = 0,11 \cdot 1\ \text{mil} = 110\ 000\ \text{Kč}$$

Výše 1. splátky:  $a_1 = M + U_1 = 235\ 000\ \text{Kč}$

Nesplacená jistina na konci 1. roku:

$$D_1 = D - M = 875\ 000\ \text{Kč}$$



# Umořovací plán

j	splátka	$U_j$	$M_j$	$D_j$
0				1000000
1	235000	110000	125000	875000
2	221250	96250	125000	750000
3	207500	82500	125000	625000
4	193750	68750	125000	500000
5	180000	55000	125000	375000
6	166250	41250	125000	250000
7	152500	27500	125000	125000
8	138750	13750	125000	0

# Současná hodnota důchodu s konstantním tempem růstu anuity

- Necht' je vyplacen v 1. období polhůtní důchod ve výši  $a$ , jehož výše roste v dalších obdobích stejnou rychlostí  $g$ . Úroková sazba je neměnná po celou dobu  $n$  období ve výši  $i$ . Současná hodnota důchodu  $D$  je:

$$\begin{aligned} D &= a/(1+i) + a.(1+g)/(1+i)^2 + \dots \\ &\quad \dots + a.(1+g)^{n-1}/(1+i)^n \\ &= (a/(1+i)).[1 + (1+g)/(1+i) + \dots \\ &\quad \dots + ((1+g)/(1+i))^{n-1}] \end{aligned}$$

Výraz v hranaté závorce je konečný součet  $n$  členů geometrické řady s 1. členem  $a_1 = 1$  a kvocientem  $q = (1 + g)/(1 + i)$ , jejíž součet je:

$$S_n = \frac{[(1 + g)/(1 + i)]^n - 1}{(1 + g)/(1 + i) - 1}$$

Současná hodnota důchodu  $D$  je:

$$D = (a/(1 + i)) \cdot \frac{[(1 + g)/(1 + i)]^n - 1}{(1 + g)/(1 + i) - 1}$$
$$D = a \cdot \frac{1 - [(1 + g)/(1 + i)]^n}{i - g}$$

# Umořovací plán s rostoucí anuitou

- Necht' úvěr ve výši  $D$  je splacen na konci každého období  $n$  splátkami, jejichž výše roste konstantním tempem  $g$  při neměnné úrokové sazbě  $i$ .
- Velikost 1. splátky je:

$$a = \frac{(i - g) \cdot D}{1 - [(1 + g)/(1 + i)]^n}$$

Úroková platba v 1. roce :  $U_1 = i \cdot D$

Úmor v 1. roce je:  $M_1 = a - U_1$

nesplacená jistina na konci 1. roku je:

$$D_1 = D - M_1$$

Velikost j-té. splátky:

$$a_j = a \cdot (1 + g)^{j-1}$$

Úrok v j-tém roce:

$$U_j = i \cdot D_{j-1}$$

Úmor v j-tém roce je:

$$M_j = a_j - U_j$$

Nesplacená jistina v j-tém roce je

$$D_j = D_{j-1} - M_j$$

- Příklad:

Sestavme umořovací plán pro úvěr ve výši 1 mil. Kč splacený anuitami rostoucími konstantním tempem 6% ročně od 1. roku po dobu 8 let při úrokové sazbě 11% p.a..

Řešení:

$$\begin{aligned} a &= 1 \text{ mil.} \cdot (0,11 - 0,06) / (1 - (1,06/1,11)^8) \\ &= 162\,134 \text{ Kč} \end{aligned}$$

$$U_1 = 0,11 \cdot 1 \text{ mil} = 110\,000 \text{ Kč}$$

$$M_1 = a - U_1 = 52\,134 \text{ Kč}$$

$$D_1 = D - M_1 = 947\,866 \text{ Kč}$$

# Umořovací plán

j	anuita	$U_j$	$M_j$	$D_j$
0				1000000
1	162134	110000	52134	947866
2	171862	104265	67597	880269
3	182174	96830	85344	794925
4	193104	87442	105662	689263
5	204690	75819	128871	560392
6	216972	61643	155327	405063
7	229990	44557	185433	219630
8	243789	24159	219630	0

# Srovnání 3 variant splacení dluhu

	1. Varianta $a = \text{konst}$	2. Varianta $M = \text{konst}$	3. Varianta $g = 0,06$
Průměrná anuita /Kč	194321	186875	200589
Placené úroky /Kč	554568	495000	604715

*Zdroj: Autor*



Doba splatnosti	Anuita	Úroky		
5	21 742,42 Kč	304 545,38 Kč		
10	13 775,00 Kč	653 000,14 Kč		
15	11 365,97 Kč	1 045 874,48 Kč		
20	10 321,88 Kč	1 477 252,14 Kč		
25	9 801,13 Kč	1 940 339,23 Kč		
30	9 523,23 Kč	2 428 364,22 Kč		

*Zdroj: Autor*

					1000000
		3%	4%	6%	
5		-78121	-104991	-159968	
10		-158729	-214942	-332246	
15		-243047	-331438	-518942	
20		-331034	-454353	-719435	
25		-422634	-583511	-932904	
30		-517775	-718695	-1158382	

*Zdroj: Autor*