



FINANČNÍ MATEMATIKA 1BP310

WWW.VSE.CZ

PŘEDNÁŠEJÍCÍ:
Jarmila Radová



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontakt

- Radová
 - Tel: 224 095 102
 - E-mail: radova@vse.cz
 - Místnost 180 NB, online
 - Konzultace
 - Po 11:00 - 12:30

Složené úročení

- U složeného úročení dochází ke kapitalizaci úroků, tedy úroky se přičítají k původnímu kapitálu a dále se úročí již zhodnocená částka
- Protože předlhůtní složené úročení se v praxi nevyužívá, budeme se věnovat jen polhůtnímu

Výpočet budoucí hodnoty kapitálu pomocí složeného úročení

Omezující předpoklady:

- a) úrokovací období je jeden rok
- b) ukládá se celý počet let

Složené úročení polhůtní

Při uložení kapitálu na dobu delší než jedno úrokové období a zároveň na celý počet úrokových období.

($m=1$)

Úroky se úročí společně s jistinou.

Je-li m různé od 1, pak se jedná o področní úročení, úroky jsou připisovány častěji než jednou ročně.

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i \cdot (1-t)}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Diagram illustrating the components of the compound interest formula:

- K_n : budoucí hodnota kapitálu (future value of capital)
- K_0 : současná hodnota kapitálu (present value of capital)
- i : úroková sazba (interest rate)
- t : srážková daň z úroků (withholding tax on interest)
- m : frekvence úročení (frequency of compounding)
- n : doba uložení kapitálu $n \dots$ v letech (term of capital investment $n \dots$ in years)

Poznámka:

- **úročitel** $(1 + i)^n$ udává, na kolik vzroste vklad 1 Kč za dobu n při úrokové sazbě i

Příklad:

Určete budoucí hodnotu částky 120 000 Kč, když jsme ji uložili na tři roky, úrokové období je roční a úroková sazba činí 2,5 % p.a.

Řešení: $K_3 = 120 \text{ tis.} \cdot (1 + 0,025)^3 = 129 226,88 \text{ Kč}$

Možno využít finanční funkce v excelu

Využití excelu pro výpočet budoucí hodnoty

- Použijeme finanční funkci Budhodnota

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the 'Data' ribbon selected. The formula bar displays the function `=BUDHODNOTA(0,025;3;;120000)`. A dialog box titled 'Argumenty funkce' is open, showing the following parameters for the BUDHODNOTA function:

Argument	Hodnota	Popis
Sazba	0,025	= 0,025
Pper	3	= 3
Splátka		= číslo
Souč_hod	120000	= 120000
Typ		= číslo

The dialog box also displays the calculated result: **Výsledek = -129226,875**. Below the dialog box, the spreadsheet shows the result **-129 226,88 Kč** in cell A1.

výsledek je se záporným znaménkem – směr toku finančních prostředků
Typ se týká splátky, která u tohoto příkladu je nulová

Ze základního vzorce je možno odvodit další veličiny

- Současná hodnota kapitálu

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

- Úroková sazba

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Pro obě veličiny existují v excelu finanční funkce

Doba uložení

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1 + i)}$$

Příklad:

Určete dobu splatnosti (uložení) kapitálu ve výši 10 000 Kč, jestliže bylo v době splatnosti vyplaceno 11 000 Kč při úrokové sazbě 2 % p.a..

Řešení:

$$n = \frac{\ln(11000) - \ln(10000)}{\ln(1 + 0,02)} = 4,80 \text{ let}$$

Doba uložení, tj počet období – funkce v excelu

The screenshot displays the Microsoft Excel interface. The ribbon is set to 'Vzorce' (Formulas). The 'Knihovna funkcí' (Function Library) group includes 'AutoSum', 'Naposledy použité' (Recently Used), and 'Finanční' (Financial). The 'Závislosti vzorců' (Formula Auditing) group includes 'Předchůdci' (Precedents), 'Následníci' (Dependents), and 'Odebrat šipky' (Remove Arrows). The 'Výpočet' (Calculation) group includes 'Okno kukátka' (Formula Window) and 'Možnosti výpočtů' (Calculation Options). The formula bar shows the formula `=POČET.OBDOBÍ(2%;;-10000;11000)` for cell A1. The spreadsheet grid shows the result `4,813007` in cell A1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	4,813007										
2											

Příklad:

Klient si vypůjčil od banky částku 50 tis. Kč. Dluh má splatit dvěma stejnými splátkami za rok a za 2 roky. Jaká je velikost těchto splátek při úrokové sazbě 8% p.a..

Řešení:

$$50 \text{ tis.} = x/(1 + 0,08)^1 + x/(1 + 0,08)^2$$

$$x = 28038,46 \text{ Kč}$$

Využití excelu pro výpočet splátky

- Použijeme finanční funkci Platba, pro dvě období, neboť splátky jsou v prvním a druhém roce.

The screenshot shows the Excel interface with the **PLATBA** function dialog box open. The formula bar displays `=PLATBA(0,08;2;50000)`. The dialog box contains the following arguments:

Argument	Hodnota	Typ
Sazba	0,08	číslo
Pper	2	číslo
Souč_hod	50000	číslo
Bud_hod		číslo
Typ		číslo

Below the arguments, the result is calculated as `= -28038,46154`. The dialog box also includes the text: "Vypočte splátku půjčky na základě konstantních splátek a konstantní úrokové sazby. Souč_hod je současná hodnota: celková hodnota série budoucích plateb." and "Výsledek = -28038,46154".

In the background spreadsheet, the formula `=PLATBA(0,08;2;50000)` is entered in cell A1, and the result **-28 038,46 Kč** is displayed in the cell.

Budoucí hodnota je nulová, neboť chceme celou částku splatit
Typ je „nula“, neboť platíme vždy na konci roku

Příklad:

Jaká byla úroková sazba z vkladu, jestliže částka 2 mil. Kč uložena po dobu 2 let vzrostla na 2 163 200 Kč. Úroky byly připisovány jednou ročně a ponechány na účtu a dále úročeny stejnou sazbou.

Řešení:

$$\begin{aligned} i &= (K_n/K_0)^{1/2} - 1 = (2,1632/2)^{1/2} - 1 \\ &= 0,04 \quad (4\%) \end{aligned}$$

Využití excelu pro výpočet úrokové míry

- Použijeme finanční funkci úroková.míra

Argumenty funkce

ÚROKOVÁ.MÍRA

Pper	2	= 2
Splátka		= číslo
Souč_hod	2000000	= 2000000
Bud_hod	-2163200	= -2163200
Typ		= číslo

= 0,04

Vrátí úrokovou sazbu vztaženou na období půjčky nebo investice. Chcete-li například zadat čtvrtletní splátky realizované 6. dubna, použijte 6%/4.

Bud_hod je budoucí hodnota nebo hotovostní bilance, kterou chcete dosáhnout po splacení poslední platby. Jestliže argument Bud_hod nezadáte, bude jeho hodnota 0.

Splátku nepoužíváme, jedná se jednorázovou platbu

Současná a budoucí hodnota mají opačná znaménka – směr toku fin. prost

Typ se týká splátky, kterou zde nemáme

- Rovnice případ častějšího připisování úroků
- (m krát), není zohledněna daň z úroků

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i/m)^{m \cdot n}$$

Kde:

K_0 je současná (počáteční) hodnota kapitálu;

n je doba splatnosti

m je četnost připisování úroků za 1 rok

i je roční úroková sazba

i/m je úroková sazba za 1 m -tinu roku

K_n je budoucí hodnota kapitálu

Příklad:

Klient má úvěr od banky. V tuto chvíli se nachází v situaci, kdy chce úvěr doplatit najednou. Pohledávka banky je:

- 200 tis. splatných za rok
- 300 tis. splatných za 2 roky.

Jakou částku musí uhradit najednou, účtuje-li banka úrokovou sazbu 7,5 % p.a. s pololetním úročením?

Řešení:

$$\begin{aligned}x &= 200\text{tis.}/(1+0,075/2)^2+300\text{tis.}/(1+0,075/2)^4 \\ &= 444725,38 \text{ Kč}\end{aligned}$$

Využití excelu pro výpočet současné hodnoty

- Použijeme finanční funkci Součhodnota – dvakrát – na první a druhou platbu

The screenshot shows two instances of the Excel SOUČHODNOTA function being used to calculate the present value of future payments.

Left Instance: The formula bar shows `=SOUČHODNOTA(0,075/2;2;;200000)`. The function arguments are:

- Sazba: 0,075/2 = 0,0375
- Pper: 2 = 2
- Splátka: (empty) = číslo
- Bud_hod: 200000 = 200000
- Typ: (empty) = číslo

 The result is -185803,458. A tooltip explains: "Bud_hod je budoucí hodnota nebo hotovostní bilance, která dosáhnout po splacení poslední platby."

Right Instance: The formula bar shows `=SOUČHODNOTA(0,075/2;4;;300000)`. The function arguments are:

- Sazba: 0,075/2 = 0,0375
- Pper: 4 = 4
- Splátka: (empty) = číslo
- Bud_hod: 300000 = 300000
- Typ: (empty) = číslo

 The result is -258921,9286. A tooltip explains: "Sazba je úroková sazba vztážená na jedno období. Čtvrtletní splátky realizované 6. dubna, použijte".

- Součet souč hodnot je výsledek

The screenshot shows the sum of the two present values calculated in the previous step using the SUMA function.

A	B	C	D
-185 803,45 Kč	SoučHod		
-258 921,93 Kč	SoučHod		
-444 725,38 Kč			

Splátku nepoužíváme, jedná se dvě jednorázové platby 200 a 300 tis.
 Budoucí hodnota a vypočtená současná mají opačná znaménka – směr toku fin. prost
 Typ se týká splátky, kterou zde nemáme

Příklad:

Při jak vysoké úrokové sazbě se zhodnotí za 5 let 50 tis. Kč na 70 tis. Kč, předpokládáme-li čtvrtletní připisování úroků?

Řešení:

$$\begin{aligned}i &= m \cdot [(K_t / K_0)^{1/m \cdot n} - 1] \\ &= 4 \cdot [(70 / 50)^{1/4.5} - 1] = 6,79\%\end{aligned}$$

Využití excelu pro výpočet úrokové míry

- Použijeme finanční funkci úroková.míra

ÚROKOVÁ... : X ✓ fx =ÚROKOVÁ.MÍRA(20;;50000;-70000)

A	B	C	D	E
1,69659%				
0,0679 Kč	A1*4			

Argumenty funkce

ÚROKOVÁ.MÍRA

Pper	20	= 20
Splátka		= číslo
Souč_hod	50000	= 50000
Bud_hod	-70000	= -70000
Typ		= číslo

= 0,016965926

Vrátí úrokovou sazbu vztahenou na období půjčky nebo investice. Chcete-li například zadat čtvrtletní splátky realizované 6. dubna, použijte 6%/4.

Bud_hod je budoucí hodnota nebo hotovostní bilance, kterou chcete dosáhnout po splacení poslední platby. Jestliže argument Bud_hod nezadáte, bude jeho hodnota 0.

- Splátku nepoužíváme, jedná se o jednorázovou platbu
- Současná a budoucí hodnota mají opačná znaménka – směr toku fin. prost
- Typ se týká splátky, kterou zde nemáme
- Počet období je počet čtvrtletí – výsledek v poli A1 je čtvrtletní úr. míra, kterou musíme vynásobit čtyřmi

Srovnání jednoduchého a složeného úročení

- Jednoduché úročení
stav kapitálu za n let

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$$

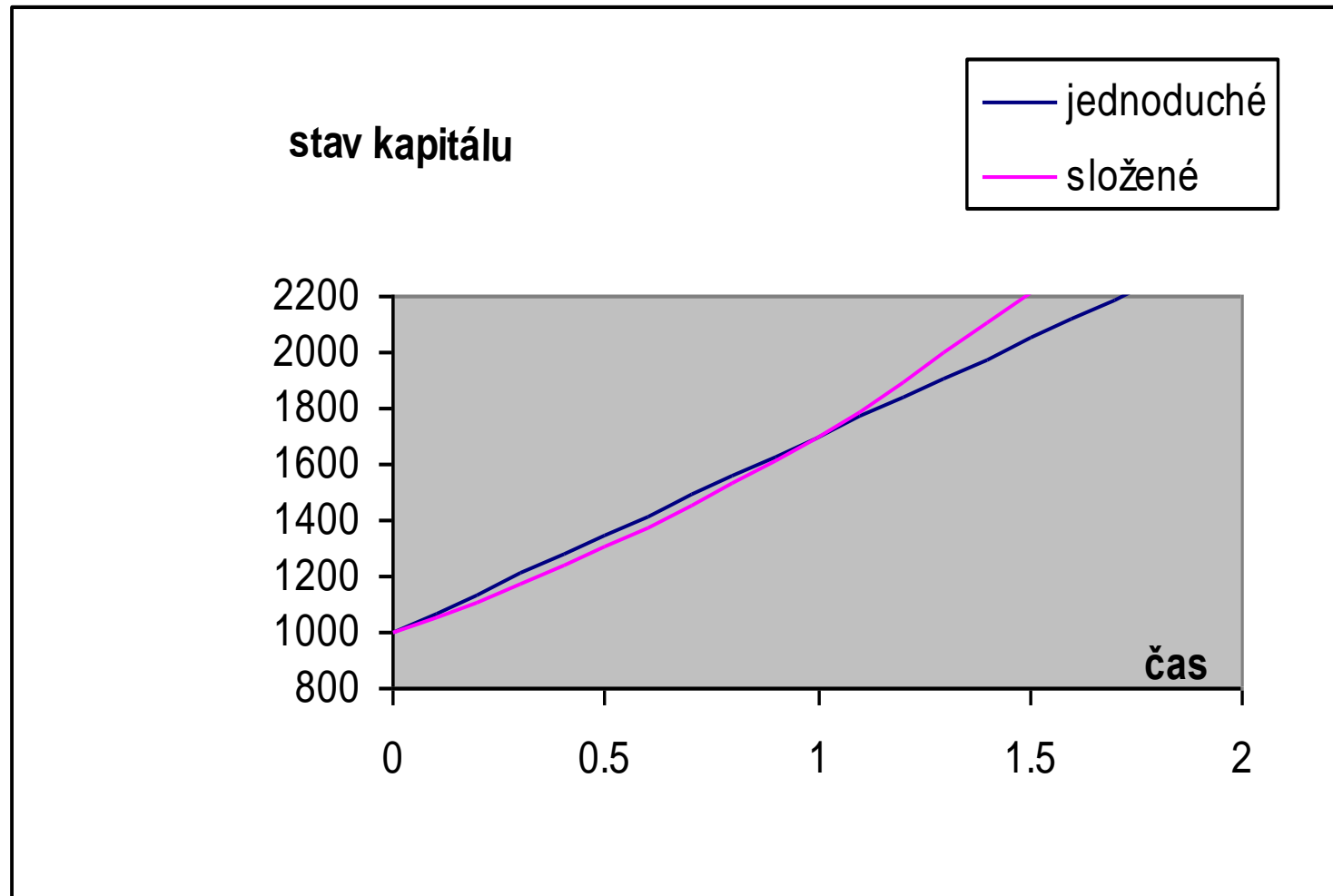
Lineární závislost stavu kapitálu na čase

- Složené úročení
stav kapitálu za n let

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

Exponenciální závislost stavu kapitálu na čase

Grafické znázornění



Zdroj: Autor

Smíšené úročení

- odstranění předpokladu, že doba splatnosti musí být celé číslo (celý počet úrokových období)
- jedná se o kombinaci jednoduchého a složeného úročení
- úroky jsou po určitou dobu připisovány k počátečnímu vkladu a s ním dále úročeny (složené úročení)
- dále se na dobu kratší než úrokové období použije jednoduché úročení

Nechť počáteční kapitál K_0 je uložen na dobu n , kdy n je kladné, ale není celé číslo \rightarrow
Ize vždy n zapsat takto:

$$n = [n] + (n - [n])$$

Kde:

$[n]$ je celá část čísla n , značí počet ukončených období, kdy je kapitál uložen

$n - [n]$ je desetinná část čísla n , značí necelou část jednoho období

$$(n - [n]) < 1$$

Kapitál na konci celých $[n]$ období se úročí složeně, tedy:

$$K_{[n]} = K_0 \cdot (1 + i)^{[n]}$$

Konečný stav kapitálu K_n je kapitál na konci $[n]$ celých období $K_{[n]}$ jednoduše zúročený na zbytek $(n - [n])$ období, tedy:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^{[n]} \cdot \{1 + (n - [n]) \cdot i\}$$

Poznámka:

Je nutno upravit úrokovou míru tak, aby odpovídala délce období.

Příklad:

Jaká bude zúročená částka (budoucí hodnota),
je-li uloženo 300 tis. Kč

po dobu 5 let a 7 měsíců při neměnné úrokové
sazbě 6,5% p.a.. Úrokové období je: a) roční
b) pololetní a c) čtvrtletní.

Řešení:

$$\begin{aligned} \text{a) } K_n &= 300\text{tis.} \cdot (1 + 0,065)^5 \cdot (1 + 0,065 \cdot 7/12) \\ &= 395194,85 \text{ Kč} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } K_n &= 300\text{tis.} \cdot (1 + 0,065/2)^{5 \cdot 2 + 1} \cdot (1 + (0,065/2) \cdot (1/12)) \\ &= 399073,52 \text{ Kč} \end{aligned}$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



Toto dílo podléhá licenci Creative Commons
Uveďte původ – Zachovejte licenci 4.0 Mezinárodní.

