FINANČNÍ MATEMATIKA 1BP310

PŘEDNÁŠEJÍCÍ:
Jarmila Radová

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontakt

- Radová
  - Tel: 224 095 102
  - E-mail: radova@vse.cz
  - Místnost 180 NB, online
  - Konzultace
    - Po 11:00 - 12:30

Budoucí hodnota anuity Spoření

- pravidelné ukládání určitých částek
- pro naše účely pravidelné úložky ve stejné výši (konstantní anuity)
- Zajímá nás budoucí hodnota
  - Možno zahrnout poplatky – viz stavební spoření
  - Možno zahrnout daně (nutno)

Krátkodobé spoření

- v rámci 1 úrokového období
- úroky přičteny na konci
- jednoduché úročení
- úroky tvoří aritmetickou posloupnost
- ukládáme-li částku počátkem dílčího období (měsíce apod.), jedná se o předlhůtní spoření
- ukládáme-li částku koncem dílčího období, jedná se o spoření polhůtní

Úložka číslo	Doba uložení	Budoucí hodnota úložky - předl	Budoucí hodnota úložky - polh	
1	m/m	x.(1 + i.m/m)		
2	(m – 1)/m	x.(1 + i.(m -1)/m)	x.(1 + i.(m - 1)/m)	1
3	(m – 2)/m	x.(1 + i.(m – 2)/m)	x.(1 + i.(m – 2)/m)	2
4			x.(1 + i.(m – 3)/m)	3
…	…	…	…	…
m	1/m	x.(1 + i.1/m)	x.(1 + i.1/m)	m-1
			X	m

m…počet dílčích období (vkladů),

A…výše vkladu (anuita)

i…úroková míra

Předlhůtní:

$$FV = Am + U = Am\left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right)$$

Polhůtní:

$$FV = Am + U = Am\left(1 + \frac{m-1}{2m}i\right)$$

Příklad:

Vypočítejte naspořenou částku na konci roku, když se bude ukládat na počátku (konci) každého měsíce 1000 Kč při úrokové sazbě 12% p.a. Úroky jsou připisovány ročně.

Řešení:

Předlhůtně 12 780 Kč

Polhůtně 12 660 Kč

Dlouhodobé spoření

- každé úrokové období je vložena jedna úložka
- více úrokových období (n)

Předlhůtní:

$$FV = A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + \cdots + A(1+i)^1 = A(1+i)[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1]$$
$$= A(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = A(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Polhůtní:

$$FV = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \cdots + 1 = A[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1] = A\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$
$$= A\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Úložka číslo	Doba uložení	Budoucí hodnota předlhůtní	Budoucí hodnota polhůtní	
1	n	$a.(1 + i)^{n}$		
2	n - 1	$a.(1 + i)^{n - 1}$	$a.(1 + i)^{n - 1}$	1
3	n - 2	$a.(1 + i)^{n - 2}$	$a.(1 + i)^{n - 2}$	2
…	…	…	$a.(1 + i)^{n - 3}$	3
n	1	$a.(1 + i)^{1}$	$a.(1 + i)^{1}$	n-1
			$a.(1 + i)^{0}$	n

$$S'_n = a * (1+i) * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

<u>Poznámka</u>: člen $s'_n = (1+i) * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ se

nazývá střadatel předlhůtní a udává, kolik se naspoří za n období při úrokové sazbě i, pokud se na počátku každého období ukládá částka

1 Kč

$$S_n = a * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Poznámka: člen $s_n = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

se nazývá střadatel polhůtní a udává, kolik se naspoří za n období při úrokové sazbě i, pokud se na konci každého období ukládá částka 1 Kč

Vztah mezi středateli, že

$$s'_n = (1+i) * s_n$$

Příklad 1

Doteď jsme spořili počátkem každého čtvrtletí 2 500 Kč při 6% p.a. a pololetním připisování úroků. Na stejném účtu chceme spořit i nadále, ovšem chceme ukládat peníze koncem každého měsíce. Kolik musí činit výše měsíční úložky, aby se celková naspořená částka ani doba spoření nezměnila?

Řešení

Pro obecné n musí dle zadání platit:

$$Am_1\left(1+\frac{m_1+1}{2m_1}i\right)\frac{(1+i)^n-1}{i}=Xm_2\left(1+\frac{m_2-1}{2m_2}i\right)\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$2500\,.\,2\,.\left(1+\frac{3}{4}\,.\,0{,}03\right)\frac{1{,}03^n-1}{0{,}03}=X\,.\,6\,.\left(1+\frac{5}{12}\,.\,0{,}03\right)\frac{1{,}03^n-1}{0{,}03}$$

Z toho pak

$$X=841{,}56\ Kč$$

Příklad 2

Jak dlouho musí klient spořit koncem každého čtvrtletí částku 18 000 Kč, aby naspořil částku 700 000 Kč při úrokové sazbě 4,83 % p.a. a čtvrtletním připisování úroků? Úroky jsou zdaněny srážkovou daní ve výši 15%.

Řešení

Ze zadání platí

$$18000\,.\frac{\left(1+\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85\right)^{4n}-1}{\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85}=700\,000$$

Po úpravě

$$\left(1+\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85\right)^{4n}=\frac{700\,000\,.\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85}{18000}+1$$

Rovnici logaritmujeme a po úpravě máme

$$n=\frac{log\left(\frac{700\,000\,.\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85}{18000}+1\right)}{4log\left(\left(1+\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85\right)\right)}=8{,}22\ let$$

Řešení v Excelu

- Vyjdeme z rovnice $$18000\,.\,\frac{\left(1+\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85\right)^{4n}-1}{\frac{0{,}0483}{4}\,.\,0{,}85}=700\,000$$
- Vytvoříme v prázdné buňce (B1) pomocnou funkci ve tvaru levé strany uvedené rovnice
- Neznámou *n* zadáme odkazem na prázdnou buňku (A1)
- Použijeme solver, Data – Analýza hypotéz/Citlivostní analýza – Hledání řešení
- Do pole nastavená buňka zadáme odkaz na buňku s pomocnou fcí (B1), do cílové hodnoty zadáme hledanou hodnotu pomocné fce pro hledané *n*, tj. 700000; do pole měněná buňka zadáme odkaz na prázdnou buňku pro *n* (A1)

Příklad 3

Kolik uspoří účastník stavebního spoření za 6 let, bude-li spořit koncem každého měsíce pravidelně 3000 CZK při úrokové sazbě 3,5 % p.a. (roční připisování)? Státní podpora činí koncem každého roku 10 % z naspořené částky včetně úroků (za daný rok) a její výše nesmí překročit za rok 2000 CZK.

Řešení – podpora bez úroků

Naspořená částka bez podpory celkem

$$S = 3000\,.\,12\,.\left(1 + \frac{11}{24}\,.\,0{,}035\right)\frac{(1 + 0{,}035)^{6} - 1}{0{,}035} = 239588{,}19 Kč$$

Podpora za rok $min(0{,}1\,.\,3000\,.\,12; 2000) = 2000$

Celkově podpora v budoucí hodnotě

$$P = 2000\,.\,\frac{(1 + 0{,}035)^{6} - 1}{0{,}035} = 13100{,}30\ Kč$$

Celkem

$$S + P = 252688{,}5\ Kč$$

Příklad 4

Nyní máme na účtu 155.000 Kč. Kolik musíme pravidelně na daný účet spořit, vždy koncem každého měsíce, abychom si za 7 let mohli z účtu vybrat 450.000 Kč, při úrokové sazbě 3 % p.a. platné v průběhu prvních čtyř let spoření a úrokové sazbě 4 % platné v průběhu posledních tří let spoření. Uvažujeme čtvrtletní připisování úroků a daň 15 %.

Řešení

Ze zadání plyne

$$450000 = 155000.\left(1+\frac{0{,}03}{4}.0{,}85\right)^{16}\left(1+\frac{0{,}04}{4}.0{,}85\right)^{12}$$

$$+X.3.\left(1+\frac{2}{6}.\frac{0{,}03}{4}.0{,}85\right)\frac{\left(1+\frac{0{,}03}{4}.0{,}85\right)^{16}-1}{\frac{0{,}03}{4}.0{,}85}.$$

$$.\left(1+\frac{0{,}04}{4}.0{,}85\right)^{12}+X.3\left(1+\frac{2}{6}\frac{0{,}04}{4}.0{,}85\right)\frac{\left(1+\frac{0{,}04}{4}.0{,}85\right)^{12}-1}{\frac{0{,}04}{4}.0{,}85}$$

Odtud

$$X = 2775{,}35Kč$$

Příklad 5

Spoříme 10 let vždy koncem měsíce 1 500 Kč při 5 % p.a. a pololetním připisování úroků. Jaká bude naspořená částka, když banka strhává na konci každého roku poplatek ve výši 560 Kč a úroky jsou zdaněny srážkou u zdroje ve výši 15%?

Řešení

Zjistíme naspořenou částku bez poplatku (S). Odečteme pak souhrn hodnot poplatků aktualizovaných pomocí spoření (P) (poplatek roční třeba převést na pololetní!)

$$S = 1500 \,.\, 6 \,.\, \left(1 + \frac{5}{12} \,.\, \frac{0,05}{2} \,.\, 0,85\right) \frac{\left(1 + \frac{0,05}{2} \,.\, 0,85\right)^{20} - 1}{\frac{0,05}{2} \,.\, 0,85} = 223379,46\ Kč$$

$$P = \frac{560 \,.\, \frac{0,05}{2} \,.\, 0,85}{\left(1 + \frac{0,05}{2} \,.\, 0,85\right)^{2} - 1} \,.\, \frac{\left(1 + \frac{0,05}{2} \,.\, 0,85\right)^{20} - 1}{\frac{0,05}{2} \,.\, 0,85} = 6816,17\ Kč$$

$$S - P = 216563,29 Kč$$

Příklad 6

Spoříme pravidelně vždy koncem měsíce na účet se čtvrtletním připisováním úroků. Po 5-ti letech máme naspořeno 500 000 Kč, na konci 5. roku u této částky vybereme 75 000 Kč a po 10-ti letech máme naspořeno 1 100 000 Kč. Jakou roční úrokovou sazbou je úročen daný účet? Jaká je velikost měsíční úložky?

Řešení

Ze zadání plyne soustava rovnic:

$$500000 = X\,.\,3\,.\left(1+\frac{2}{6}i\right)\frac{(1+i)^{20}-1}{i}$$

$$1100000 = X\,.\,3\,.\left(1+\frac{2}{6}i\right)\frac{(1+i)^{20}-1}{i} + 425000\,.\,(1+i)^{20}$$

Neboli, po dosazení y první rovnice do druhé

$$600000 = 425000\,.\,(1+i)^{20}$$

Odtud

$$i = \sqrt[20]{\frac{600000}{425000}} - 1 = 1{,}74\,\%\,p.q. = 6{,}96\,\%\,p.a.$$

Úložku dopočteme z první rovnice

$$X = \frac{500000}{3\,.\left(1+\frac{2}{6}.\,0{,}0174\right)\frac{(1+0{,}0174)^{20}-1}{0{,}0174}} = 6998{,}25\ Kč$$

Poplatky

- 1. poplatek je účtován častěji, než jsou připisovány úroky – celkem *m* poplatků za jedno úrokovací období
- - poplatek převedeme k ekvivalentu X pomocí krátkodobého spoření
- $X = P \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m \pm 1}{2m} i\right)$

Poplatky

- 2. poplatek je účtován méně často, než jsou připisovány úroky – celkem *m* připisování mezi 2 poplatky (př. roční poplatek, čtvrtletní úročení, *m* = 4)
- -ekvivalent X určíme jako úložku, kterou kdybychom spořili po daných *m* období, tak dostaneme poplatek P
- $P = X \cdot \frac{(1+i)^m - 1}{i}$
- $X = \frac{P \cdot i}{(1+i)^m - 1}$

Poplatky

- 3. poplatek je účtován stejně často, jako jsou připisovány úroky
- - potom $X = P$
- Jak s X počítáme?
- U spoření poplatek snižuje výslednou naspořenou částku
- $\left[A \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m \pm 1}{2m} i\right) - X\right] \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
- U důchodu poplatek zvyšuje částku potřebnou k výplatě dané anuity
- $\left[A \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m \pm 1}{2m} i\right) + X\right] \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY