Interpolace funkce

polynomy n-tého stupně

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Interpolační polynom f

Body $[x_0, y_0], [x_1, y_1], \cdots, [x_m, y_m]$ prokládáme fci f takovou, aby $y_i = f(x_i)$. Je-li f polynomická fce

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, je

$a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \cdots + a_0 = y_i, \quad i = 0, \cdots, m,$ tj.

$m + 1$ rovnic pro $n + 1$ neznámých

$m = n \Rightarrow$ právě 1 řešení

Lagrangeův interpolační polynom

$$[x_0, y_0], [x_1, y_1], \cdots, [x_n, y_n]$$

$y_j = 1$ a $y_i = 0$ pro $i = 0, \cdots, n, i \neq j$:

$$ {}^{j}l_n(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \cdots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \cdots \cdot (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdot \cdots \cdot (x_j - x_n)} $$

$$L_n(x) = y_0\,{}^{0}l_n(x) + y_1\,{}^{1}l_n(x) + \cdots + y_n\,{}^{n}l_n(x)$$

Newtonův interpolační polynom

$[x_0, y_0], [x_1, y_1], \cdots, [x_n, y_n]$

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1})$$

- $y_0 = a_0$
- $y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$
- $y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

. . . .

- $y_n = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_{n-1})$

Nevýhody a výhody obou polynomů

Lagrangeův polynom

výhody:

- explicitní vyjádření
- jednoduché výpočty

nevýhody:

- množství operací pro výpočet hodnoty
- přidání dalšího bodu, změní vyjádření všech sčítanců
- oscilace polynomů

Newtonův polynom

výhody:

- trojúhelníkový tvar soustavy
- funkční hodnota Hornerovým schématem
- přidání dalšího bodu, změní poslední sčítanec

nevýhody:

- řešení soustavy rovnic
- oscilace polynomů

Hornerovo schéma

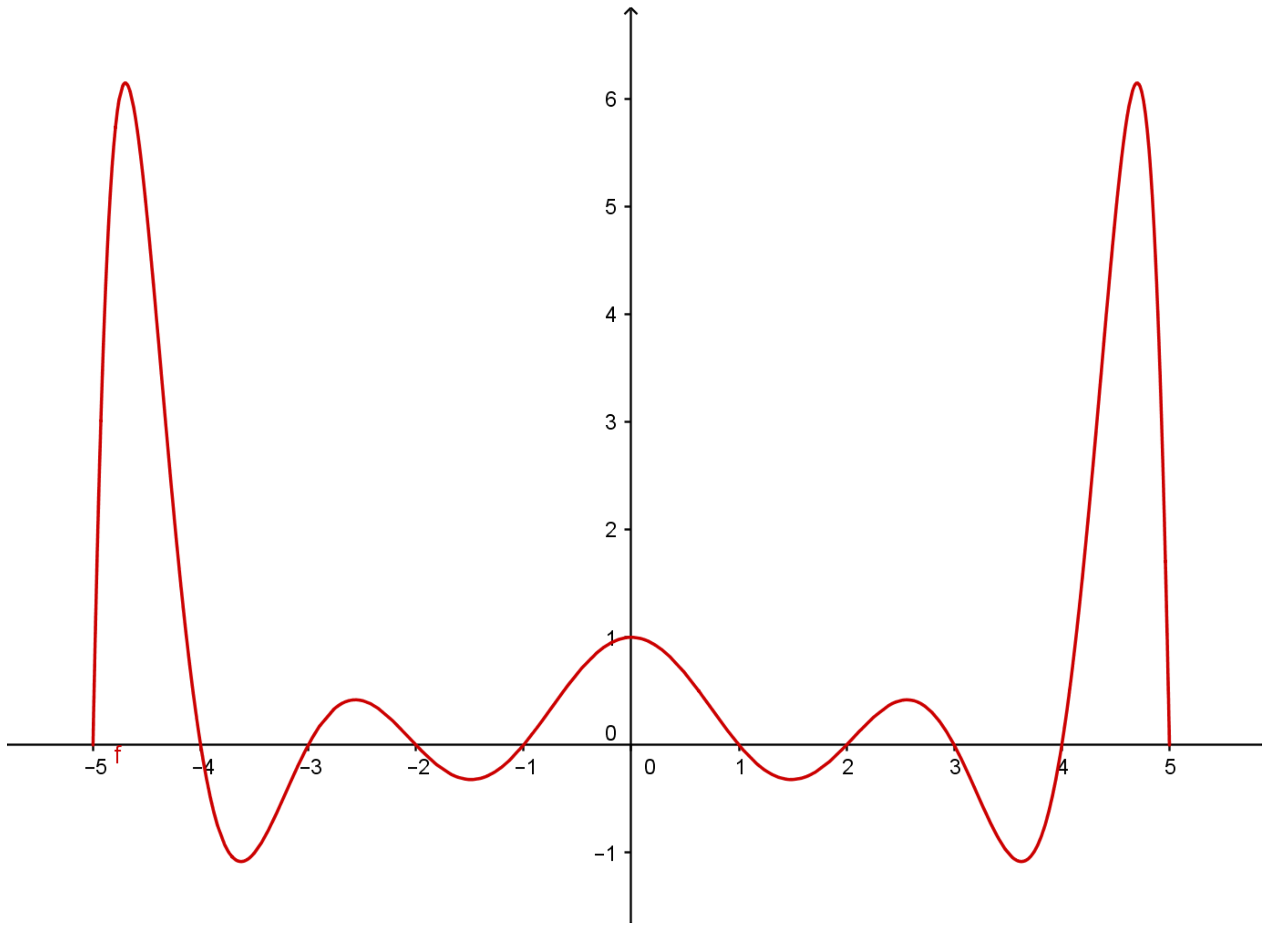
$$f(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_1)(a_2 + (x - x_2)(a_3 + \\ \cdots + (x - x_{n-3})(a_{n-2} + (x - x_{n-2})(a_{n-1} + (x - x_{n-1})a_n)\cdots)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots.. & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & a_n(\propto - x_{n-1}) & b_{n-1}(\propto - x_{n-2}) & \ldots. & b_3(\propto - x_2) & b_2(\propto - x_1) & b_1(\propto - x_0) \\
\hline
a_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots.. & b_2 & b_1 & b_0
\end{array}$$

$$b_{n-1} = (\propto - x_{n-1})a_n + a_{n-1}$$
$$b_{n-2} = (\propto - x_{n-2})b_{n-1} + a_{n-2}$$
$$\ldots\ldots$$
$$b_2 = (\propto - x_2)b_3 + a_2$$
$$b_1 = (\propto - x_1)b_2 + a_1$$
$$b_0 = (\propto - x_0)b_1 + a_0$$

$$[-5,0],[-4,0],[-3,0],[-2,0],[-1,0],[0,1],[1,0],[2,0],[3,0],[4,0],[5,0]$$

$$L_{10}(x) = -\frac{1}{120^2}(x^2-25)(x^2-16)(x^2-9)(x^2-4)(x^2-1)$$



Zdroj: autor

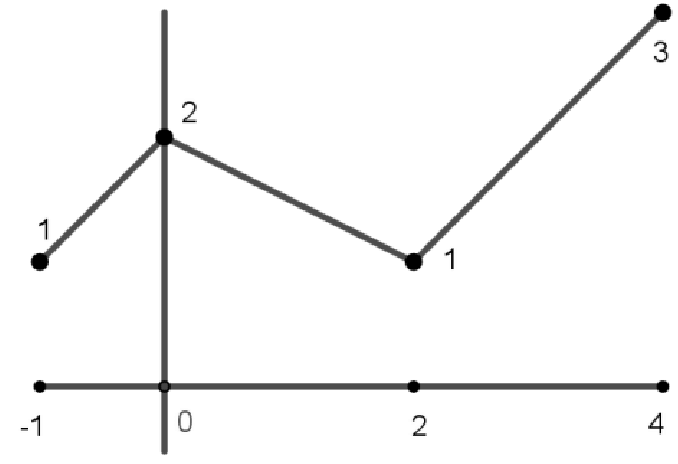
Interpolace po částech lineární

$[x_0, y_0], [x_1, y_1], \cdots, [x_n, y_n], y_i = f(x_i)$

$f_0(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, x \in \langle x_0, x_1 \rangle$

....

$f_{n-1}(x) = y_{n-1} \frac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n} + y_n \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle$



Zdroj: autor

Kvadratická spline-funkce

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in \langle x_0, x_1 \rangle \\ \varphi_1(x), & x \in \langle x_1, x_2 \rangle \\ & \cdots \\ \varphi_{n-1}(x), & x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle \end{cases}$$

$$\varphi_j(x) = a_j + b_j\left(x - x_j\right) + c_j\left(x - x_j\right)^2,$$

$$j = 0,1,\cdots,n-1$$

Podmínky pro a_i, b_i, c_i

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0,1,\cdots,n, \qquad n+1$$

$$\varphi_i(x_{i+1}) = \varphi_{i+1}(x_{i+1}), \qquad i = 0,\cdots,n-2, \qquad n-1$$

$$\varphi'_i(x_{i+1}) = \varphi'_{i+1}(x_{i+1}), \qquad i = 0,\cdots,n-2, \qquad n-1$$

3 n - 1 podmínek + 1 okrajová podmínka

$$\mathbf{a_i} = \mathbf{y_i}, \varphi'_i(x_i) = \mathbf{b_i} = \mathbf{M_i}\ , \mathbf{c_i} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2h_i}}(\mathbf{M_{i+1}} - \mathbf{M_i}),$$

$$h_i = h_{i+1} - h_i$$

$$\boldsymbol{M_i} + \boldsymbol{M_{i+1}} = \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{h_i}}(\boldsymbol{y_{i+1}} - \boldsymbol{y_i}), \quad i = 0,\cdots,n-1$$

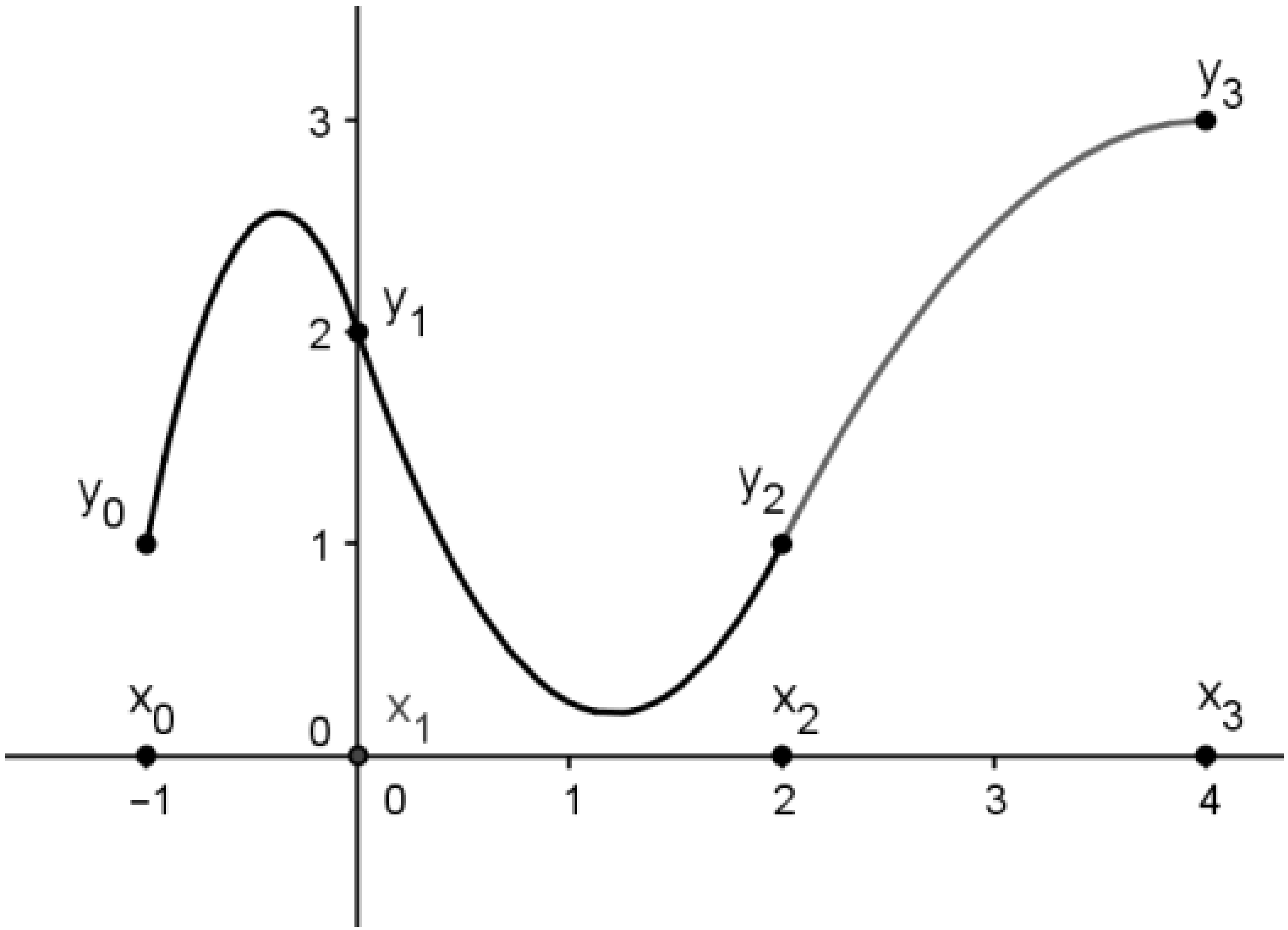
Příklad: $[-1,1],[0,2],[2,1],[4,3]$

$$\varphi_0(x) = 5x + 6 - 4(x+1)^2, x \in \langle -1,0 \rangle$$

$$\varphi_1(x) = 2 - 3x + \frac{5}{4}x^2, x \in \langle 0,2 \rangle$$

$$\varphi_2(x) = 2x - 3 - \frac{1}{2}(x-2)^2, x \in \langle 2,4 \rangle$$

Počáteční podmínka: $M_3 = 0$



Zdroj: autor

Kubická spline-funkce

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in \langle x_0, x_1 \rangle \\ \varphi_1(x), & x \in \langle x_1, x_2 \rangle \\ & \dots \\ \varphi_{n-1}(x), & x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle \end{cases}$$

$$\varphi_j(x) = a_j + b_j\left(x - x_j\right) + c_j\left(x - x_j\right)^2 + d_j\left(x - x_j\right)^3,$$

$$j = 0,1,\cdots,n-1$$

Podmínky pro a_i, b_i, c_i, d_i

$\varphi(x_i) = f(x_i),$	$i = 0,1,\cdots,n,$	$n+1$
$\varphi_i(x_{i+1}) = \varphi_{i+1}(x_{i+1}),$	$i = 0,\cdots,n-2,$	$n-1$
$\varphi'_i(x_{i+1}) = \varphi'_{i+1}(x_{i+1}),$	$i = 0,\cdots,n-2,$	$n-1$
$\varphi''_i(x_{i+1}) = \varphi''_{i+1}(x_{i+1}),$	$i = 0,\cdots,n-2.$	$n-1$
		$4\,n-2$

+ 2 okrajové podmínky

Momenty spline-funkce

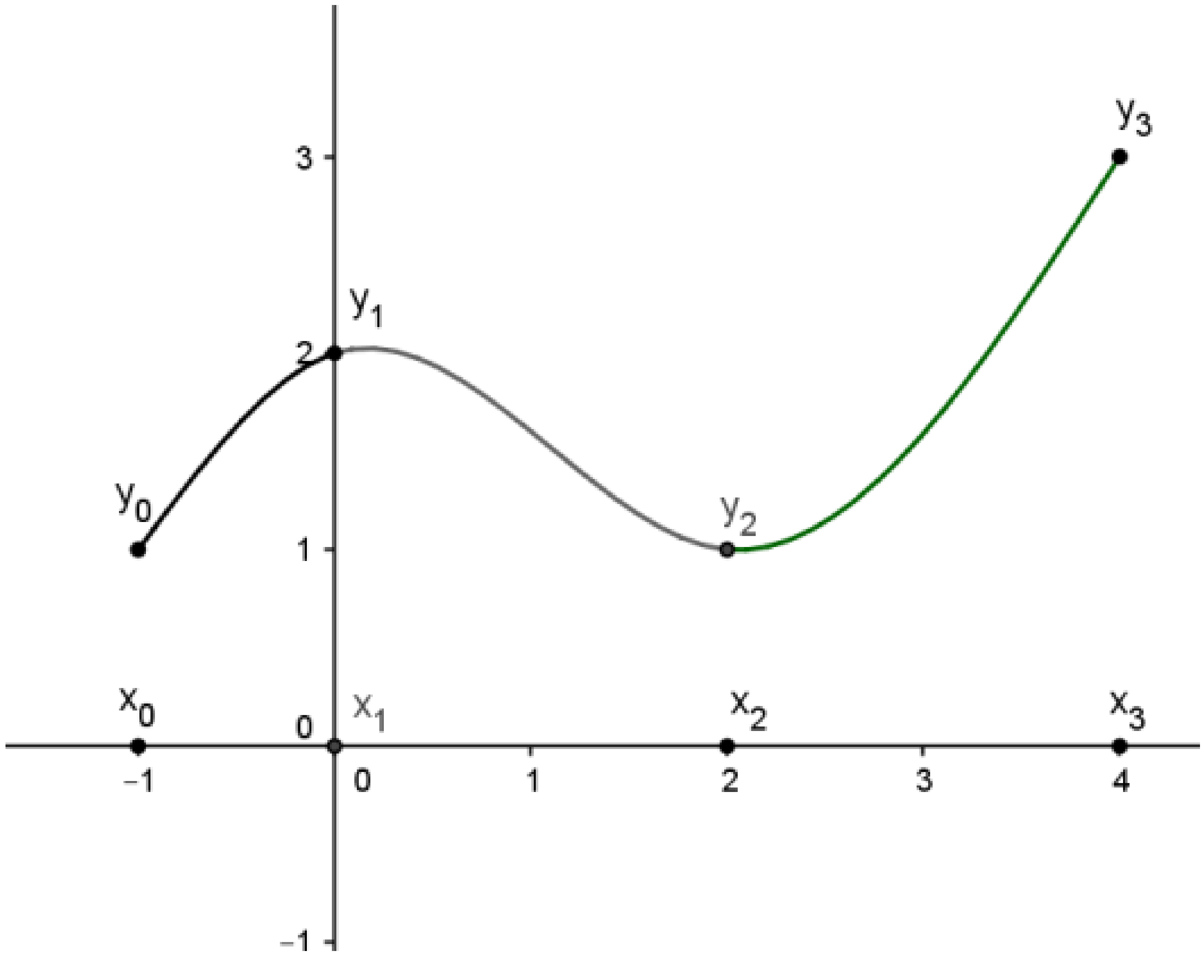
- $M_i = \varphi''(x_i), \quad i = 1, \cdots, n-1$
- $h_i = x_{i+1} - x_i, \ \ i = 0, \cdots, n-1$

$$\boldsymbol{a_i = y_i,\ b_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} + 2M_i),\ \ c_i = \frac{1}{2}M_i, d_i = \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i}}$$

$$\boldsymbol{h_i M_i + 2(h_i + h_{i+1})M_{i+1} + h_{i+1}M_{i+2} = 6\left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right)}$$

$M_1, \cdots, M_{n-1}$ neznámé

M_0, M_n okrajové podmínky



Zdroj: autor

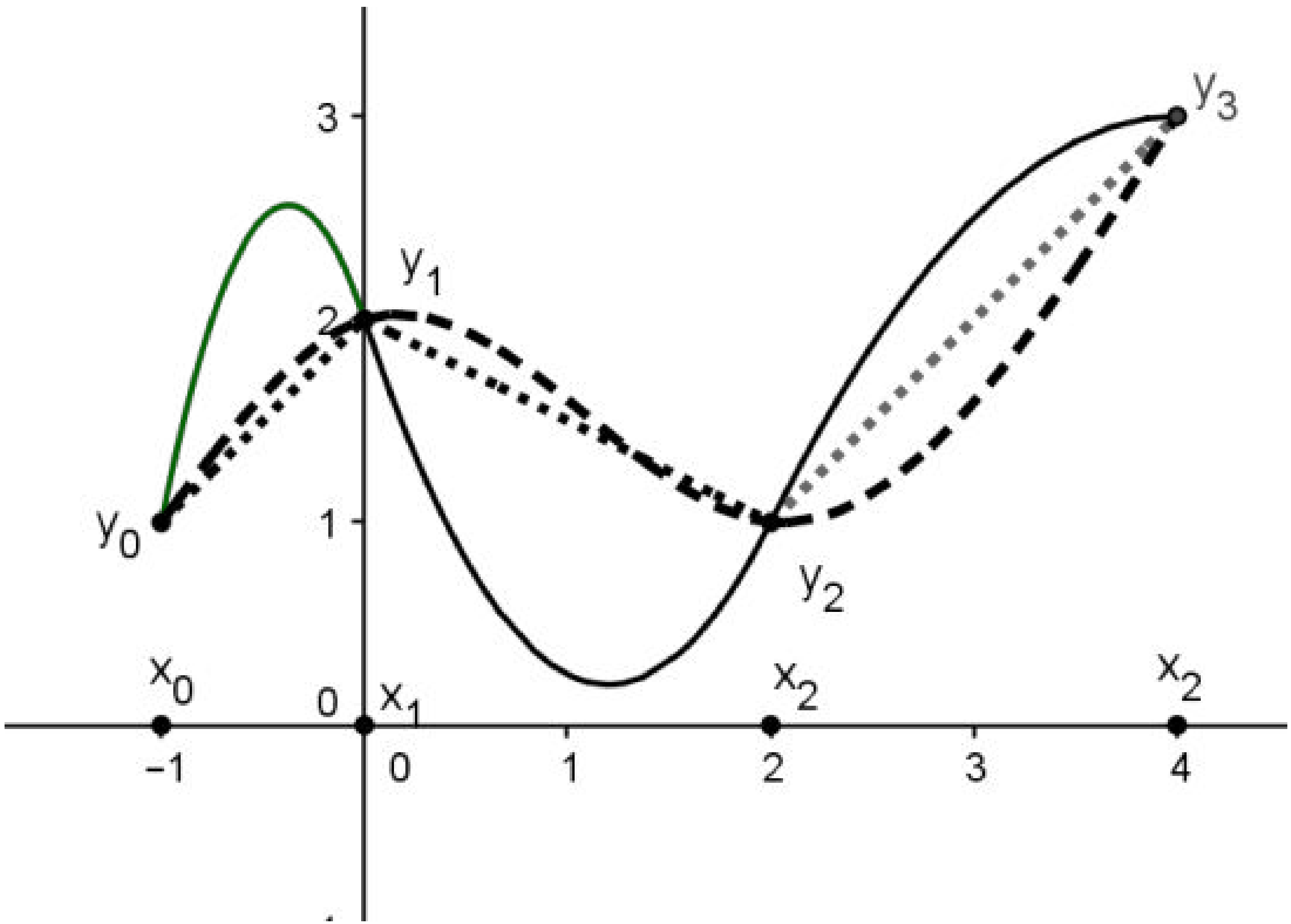
Příklad: $[-1,1],[0,2],[2,1],[4,3]$

$$\varphi_0(x) = 1 + \frac{59}{44}(x+1) - \frac{15}{44}(x+1)^3, x \in \langle -1,0 \rangle$$

$$\varphi_1(x) = 2 + \frac{7}{22}x - \frac{45}{44}x^2 + \frac{27}{88}x^3, x \in \langle 0,2 \rangle$$

$$\varphi_2(x) = 1 - \frac{1}{11}(x-2) + \frac{9}{11}(x-2)^2 - \frac{3}{22}(x-2)^3, x \in \langle 2,4 \rangle$$

Počáteční podmínky: $M_0 = M_3 = 0$



Zdroj: autor

B-spline funkce

Interpolace dat $[x_i, y_i], i = 0,1,\cdots,n$ bázovými funkcemi

$$B_{i,1}(x) = 1, x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle,$$

$$B_{i,1}(x) = 0, x \in (-\infty, x_i) \cup (x_{i+1}, +\infty), i = 0, \cdots, n-1,$$

$$B_{i,k}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k-1} - x_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{x_{i+k} - x}{x_{i+k} - x_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x).$$

Vlastnosti bázových funkcí

Spline funkce $s(x)$ je lineární kombinací bázových funkcí $B_{-k}, \cdots, B_{n-1}$

$$s(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} \alpha_i B_{i,k}(x), x \in \langle x_0, x_n \rangle, \alpha_i \in \mathbf{R}.$$

- $B_{i,k}(x) > 0, x \in \langle x_i, x_{i+k} \rangle,$
- $B_{i,k}(x) = 0, x \notin \langle x_i, x_{i+k} \rangle,$
- $\sum_{i=r+1-k}^{s-1} B_{i,k}(x) = 1, \;\; x \in (x_r, x_s), \; 0 \leq r < s \leq n.$

Konstantní B-spline

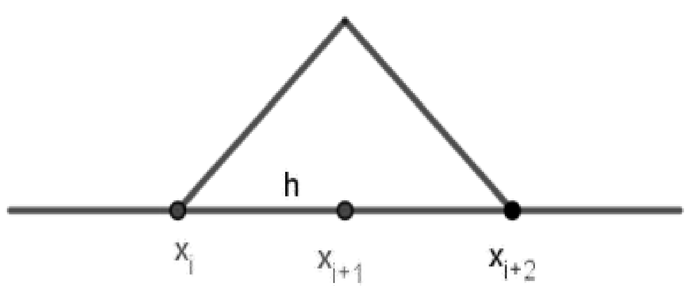
- $B_{i,1}(x) = 1, \quad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$,
- $B_{i,1}(x) = 0, \quad x \in (-\infty, x_i) \cup (x_{i+1}, +\infty)$

- $B_{i+1,1}(x) = 1, \quad x \in \langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle,$
- $B_{i+1,1}(x) = 0, \quad x \in (-\infty, x_{i+1}) \cup (x_{i+2}, +\infty)$

Lineární B-spline

$$B_{i,2}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} B_{i,1}(x) + \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} B_{i+1,1}(x)$$

- $B_{i,2}(x) = 0, x \in (-\infty, x_i) \cup (x_{i+2}, +\infty)$,
- $B_{i,2}(x) = \frac{x - x_i}{h}$, $x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$,
- $B_{i,2}(x) = \frac{x_{i+2} - x}{h}$, $x \in \langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle$.

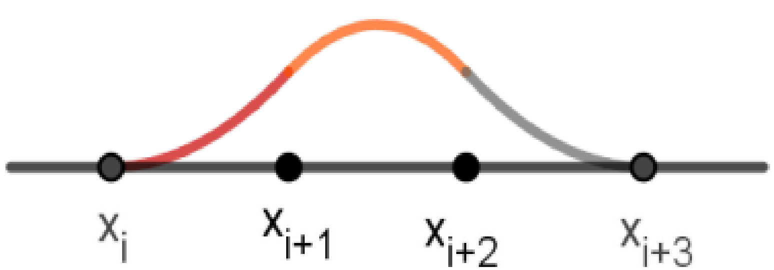


Zdroj: autor

Kvadratická B-spline

$$B_{i,3}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+2} - x_i} B_{i,2}(x) + \frac{x_{i+3} - x}{x_{i+3} - x_{i+1}} B_{i+1,2}(x)$$

- $B_{i,3}(x) = 0, x \in (-\infty, x_i) \cup (x_{i+3}, +\infty),$
- $B_{i,3}(x) = \frac{(x-x_i)^2}{2h^2}, x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle,$
- $B_{i,3}(x) = \frac{(x-x_i)(x_{i+2}-x)}{2h^2} + \frac{(x_{i+3}-x)(x-x_{i+1})}{2h^2}, x \in \langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle,$
- $B_{i,3}(x) = \frac{(x_{i+3}-x)^2}{2h^2}, x \in \langle x_{i+2}, x_{i+3} \rangle,$



Zdroj: autor

Kubická B-spline

$$B_{i,4}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+3} - x_i} B_{i,3}(x) + \frac{x_{i+4} - x}{x_{i+4} - x_{i+1}} B_{i+1,3}(x)$$

$B_{i,4}(x) = 0, x \in (-\infty, x_i) \cup (x_{i+4}, +\infty)$

$B_{i,4}(x) = \frac{(x-x_i)^3}{6h^3}, x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle, B_{i,4}(x_i) = 0, B_{i,4}(x_{i+1}) = \frac{1}{6}$,

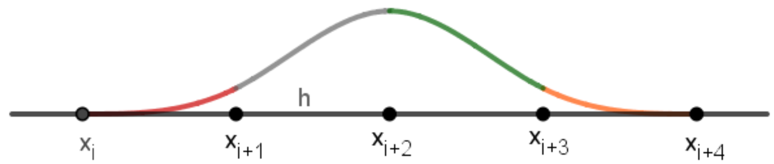
$B_{i,4}(x) = \frac{x-x_i}{3h}\left(\frac{(x-x_i)(x_{i+2}-x)}{2h^2} + \frac{(x_{i+3}-x)(x-x_{i+1})}{2h^2}\right) + \frac{(x_{i+4}-x)(x-x_{i+1})^2}{6h^3}, x \in \langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle,$

$B_{i,4}(x_{i+1}) = \frac{1}{6}$, $B_{i,4}(x_{i+2}) = \frac{2}{3}$,

$B_{i,4}(x) = \frac{x-x_i}{3h}\frac{(x_{i+3}-x)^2}{2h^2} + \frac{x_{i+4}-x}{3h}\left(\frac{(x-x_{i+1})(x_{i+3}-x)}{2h^2} + \frac{(x_{i+4}-x)(x-x_{i+2})}{2h^2}\right), x \in \langle x_{i+2}, x_{i+3} \rangle$

$B_{i,4}(x_{i+2}) = \frac{2}{3}$, $B_{i,4}(x_{i+3}) = \frac{1}{6}$,

$B_{i,4}(x) = \frac{(x_{i+4}-x)^3}{6h^3}, x \in \langle x_{i+3}, x_{i+4} \rangle, B_{i,4}(x_{i+3}) = \frac{1}{6}$, $B_{i,4}(x_{i+4}) = 0.$

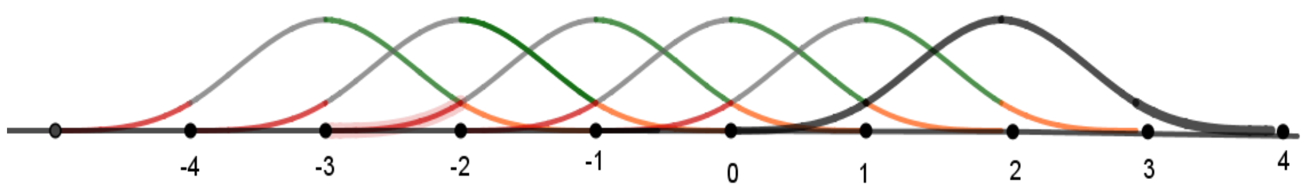


Zdroj: autor

$$s(x) = \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_{i,4}(x), \qquad s(x_j) = y_j, j = 0, \cdots, n.$$

Koeficientů je $n + 3$, bodů $n + 1$ a dvě podmínky:

$s''(x_0) = s''(x_n) = 0.$



Zdroj: autor

Derivace v krajních bodech

$\langle 0,1 \rangle$: $B(x) = \frac{1}{6}x^3, B''(x) = x,$

$\langle 1,2 \rangle$: $B(x) = \frac{1}{6}(-3x^3 + 12x^2 - 12x + 4), B''(x) = 4 - 3x,$

$\langle 2,3 \rangle$: $B(x) = \frac{1}{6}(3x^3 - 24x^2 + 60x - 44), B''(x) = 3x - 8,$

$\langle 3,4 \rangle$: $B(x) = \frac{1}{6}(4 - x)^3, B''(x) = 4 - x.$

Hodnoty v krajních bodech

$$\alpha_{-4}x_0 + \alpha_{-3}(4 - 3x_0) + \alpha_{-2}(3x_0 - 8) + \alpha_{-1}(4 - x_0) = y_0,$$

Pro $x_0 = 0 \Rightarrow 4\alpha_{-3} - 8\alpha_{-2} + 4\alpha_{-1} = y_0,$

$$\alpha_{n-2}x_n + \alpha_{n-1}(4 - 3x_n) + \alpha_n(3x_n - 8) + \alpha_{n+1}(4 - x_n) = y_n,$$

Pro $x_n = 4 \Rightarrow 4\alpha_{n-2} - 8\alpha_{n-1} + 4\alpha_n = y_n,$

Výsledná soustava

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{-3} \\ \alpha_{-2} \\ \alpha_{-1} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$