Funkce 2 reálných proměnných

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Definice a vlastnosti

$\mathbf{M} = \{[x, y], x, y \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2$

Funkce f je zobrazení množiny $\mathbf{M}$ do množiny $\mathbf{R}$.

$[x, y] \longrightarrow z,\ z = f(x, y) \in \mathbf{R}$

$\mathbf{D}_f = \{[x, y] \in \mathbf{M},\ z = f(x, y)\}$ definiční obor

$\mathbf{H}_f = \left\{z \in \mathbf{R}, z = f(x, y),\ [x, y] \in \mathbf{D}_f\right\}$ obor hodnot

Graf $f = \left\{[x, y, f(x, y)] \in \mathbf{R}^3, [x, y] \in \mathbf{D}_f\right\}$

Vrstevnice funkce $f = \left\{[x, y] \in \mathbf{D}_f, f(x, y) = c,\ c \in \mathbf{H}_f\right\}$

f je funkce užitku – vrstevnice je **indiferenční křivka**

f je produkční funkce – vrstevnice je **izokvanta**

Příklady funkcí

- Lineární funkce $f\colon z = ax + by + c,$
- Kvadratická funkce $f\colon z = ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + g$

  aspoň jedno z čísel a,b,e je různé od nuly

  $f\colon z = x^2 + y^2$

  $f\colon z = x^2 - y^2$

  $f\colon z = x\,y$

Body množiny

- ***Okolí bodu*** $A[a,b] \in \mathbf{R}^2$ *o poloměru* $r > 0$ *je množina* $\mathbf{U}(A) = \{X \in \mathbf{R}^2, |AX| < r\}$*, tj. kruh o středu A a poloměru r bez hraniční kružnice.*

- *Bod* $A[a,b] \in \mathbf{M}$ *je* ***hromadným bodem*** *množiny* $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^2$*,* jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny $\mathbf{M}$.

Limita a spojitost funkce

Funkce f má limitu $\alpha \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ v bodě $A \in \mathbf{R}^2$, *který je hromadným bodem množiny* $\mathbf{D}_f$, jestliže ke každému okolí $\mathbf{U}(\alpha)$ *existuje prstencové okolí* $\mathbf{U}'(\mathrm{A}) = \mathbf{U}(\mathrm{A}) - \{\mathrm{A}\}$ *takové, že pro každé* $X \in \mathbf{U}'(A) \cap \mathbf{D}_f$ je $f(X) \in \mathbf{U}(\alpha)$. *Píšeme*

$$\lim_{X \to A} f(X) = \alpha\,.$$

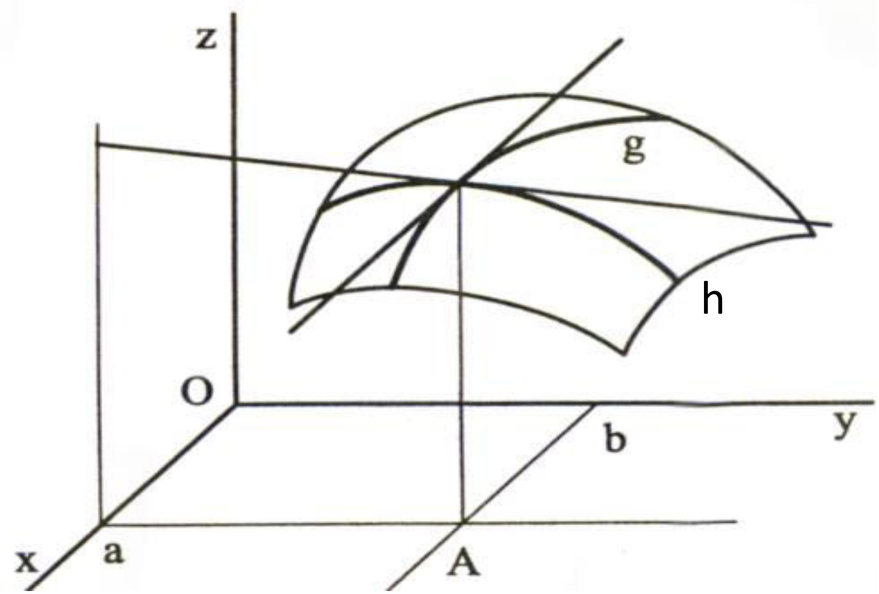
Funkce f je spojitá *v bodě* $A \in \mathbf{D}_f$, jestliže

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A)\,.$$

Parciální derivace funkce

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$$

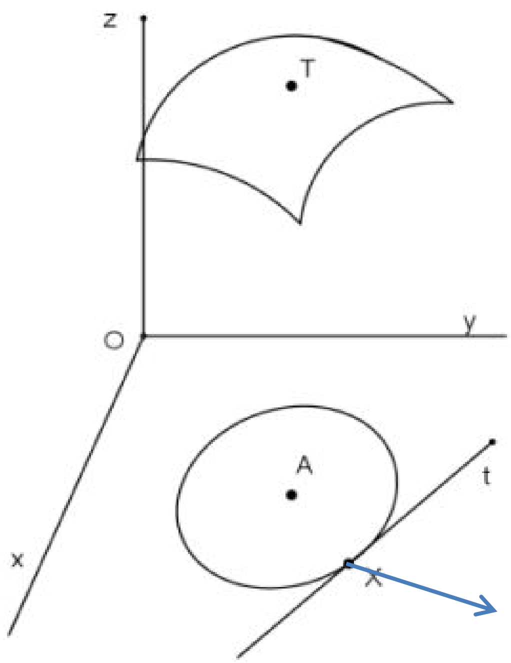
$$h'(b) = \lim_{k \to 0} \frac{h(b+k) - h(b)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$$



Zdroj: autor

Rovnice tečny vrstevnice - gradient

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(X)}{\partial y}(y - y_0) = 0 \text{ v bodě } X[x_0, y_0]$$



Směrnice tečny

$$-\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y}$$

*je **mezní mírou substituce** ve spotřebě.*

Vektor kolmý na vrstevnici

$$\operatorname{grad} f(X) = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x}, \frac{\partial f(X)}{\partial y}\right)$$

*se nazývá **gradient funkce** f v bodě X.*

Zdroj: autor

Rovnice tečné roviny

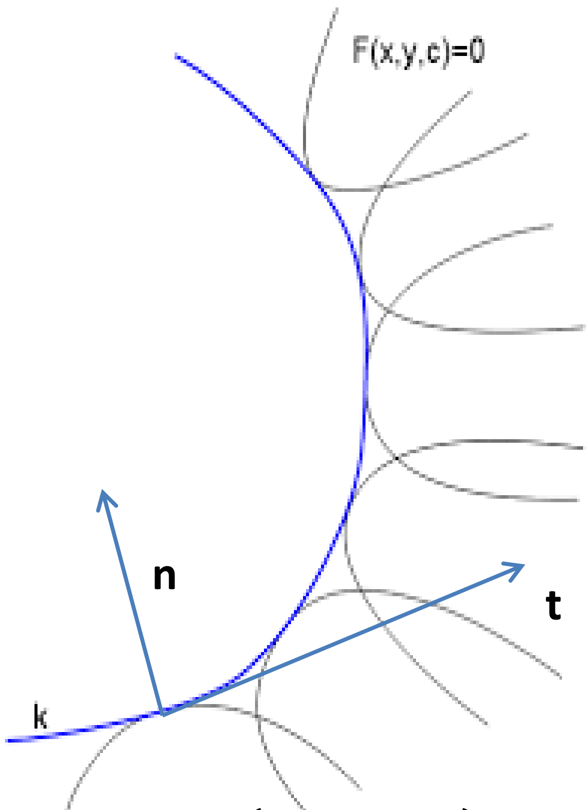
Normálový vektor *grafu funkce* $f: z = f(x, y)$ *v bodě* $T[a, b. f(a, b)]$ *je vektor*

$$\mathbf{n} = \left(f_x(a, b), f_y(a, b), -1\right).$$

Rovnice tečné roviny *grafu funkce* f *v bodě* $T[a, b, f(a, b)], A[a, b]$ *je*

$$f_x(A)(x - a) + f_y(A)(y - b) - \left(z - f(A)\right) = 0$$

Obalová křivka



$\mathrm{X}(c) = \big(x(c), y(c)\big)$

Zdroj: autor

$$F(x,y,c) = 0$$

$\dfrac{\partial F}{\partial c}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial c^2}$ na $(a,b), \dfrac{\partial^2 F}{\partial c^2} \neq 0$

jsou spojité.

$$F_c(x,y,c) = 0$$

$$\mathbf{k}\!: F\big(x, y, c(x,y)\big) = 0$$

Křivka dlouhodobých celkových nákladů je obalovou křivkou křivek krátkodobých nákladů.

Derivace složené funkce

$$f: z = f(x, y), x = \varphi(t), y = \omega(t) \Rightarrow F(t) = f\big(\varphi(t), \omega(t)\big)$$

$$\mathbf{D}_{\varphi} = \mathbf{D}_{\omega}, \mathbf{H}_{\varphi} \times \mathbf{H}_{\omega} \subset \mathbf{D}_{\mathrm{f}}$$

$$F'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f\big(\varphi(t), \omega(t)\big) - f\big(\varphi(t_0), \omega(t_0)\big)}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{f\big(\varphi(t), \omega(t_0)\big) - f\big(\varphi(t_0), \omega(t_0)\big)}{\varphi(t) - \varphi(t_0)} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} +$$

$$+ \lim_{t \to t_0} \frac{f\big(\varphi(t), \omega(t)\big) - f\big(\varphi(t), \omega(t_0)\big)}{\omega(t) - \omega(t_0)} \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{t - t_0}$$

$$F'(t_0) = \frac{\partial f(A)}{\partial x} \cdot \varphi'(t_0) + \frac{\partial f(A)}{\partial y} \cdot \omega'(t_0), \quad A[\varphi(t_0), \omega(t_0)]$$

Derivace funkce podle jednotkového vektoru

$$F'(t_0) = \left(f_x(A), f_y(A)\right) \cdot (\varphi'(t_0), \omega'(t_0)) = \mathrm{grad}\, f(A) \cdot \boldsymbol{t}$$

$$\cos \propto = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \propto$$

$$\frac{df(A)}{d\,\boldsymbol{e}} = |\boldsymbol{e}||\mathrm{grad}\, f(A)| \cos \propto = |\mathrm{gra}d\, f(A)| \cos \propto,$$

$$\mathbf{e} = \mathrm{grad\ f(A)/|grad\ f(A)|}$$

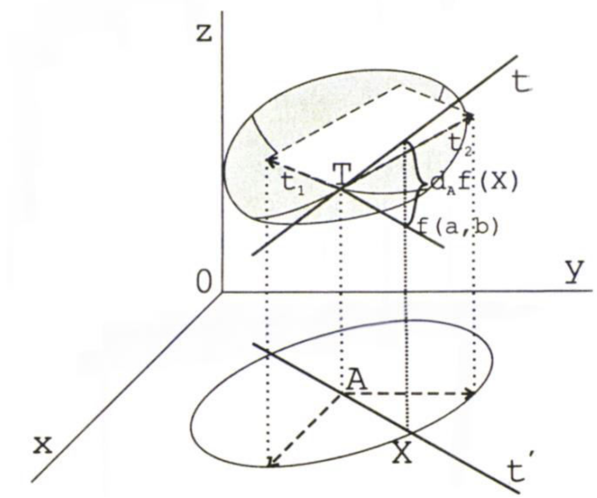
$$\frac{df(A)}{d\mathrm{grad}\, f(A)} = \pm|\mathrm{grad\ f(A)}|$$

Diferencovatelná funkce
totální diferenciál

$$f(X) - f(A) = K_1(x-a) + K_2(y-b) + \omega_1(X)(x-a) + \omega_2(X)(y-b)$$

$y = b$: $\quad \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = K_1 + \omega_1(x,b)$

$x = a$: $\quad \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = K_2 + \omega_2(a,y)$



Zdroj: autor

$$f(X) - f(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y-b) + \omega(X)(X-A) =$$

$$= d_A f(x,y) + \omega(X)(X-A)$$

Parciální derivace 2. řádu funkce 2 proměnných

$$z = f(x, y)$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$f_{xx}(X) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(X)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x^2}$$

$$f_{xy}(X) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f X}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yx}(X) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(X)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yy}(X) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(X)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial y^2}$$

Diferenciály vyšších řádů

$$F(t) = f(a + th_1, b + th_2), X = A + t\,\mathbf{h}$$

$$F'(t) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} h_2$$

$$F''(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(X)}{\partial y} h_2\right) h_1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(X)}{\partial y} h_2\right) h_2$$

$F''(0)$:

$$d^2 f_A(\mathbf{h}) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} h_2^2,$$

$$d^2 f_A(\mathbf{h}) = f_{xx}\left(h_1 + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} h_2\right)^2 + \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}} h_2^2$$

- $d^2 f_A(\mathbf{h}) > 0$ pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$, a to právě když $f_{xx} > 0$, $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$, nazýváme $d^2 f_A(\mathbf{h})$ **pozitivně definitní**,
- $d^2 f_A(\mathbf{h}) < 0$ pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$, a to právě když $f_{xx} < 0$, $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$, nazýváme $d^2 f_A(\mathbf{h})$ **negativně definitní**,
- existuje $\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$ takové, že $d^2 f_A(\mathbf{h}) > 0$ a existuje $\mathbf{h}' \neq \mathbf{o}$ takové, že $d^2 f_A(\mathbf{h}') < 0$, tj. právě když $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} < 0$, nazýváme $d^2 f_A(\mathbf{h})$ **indefinitní**.

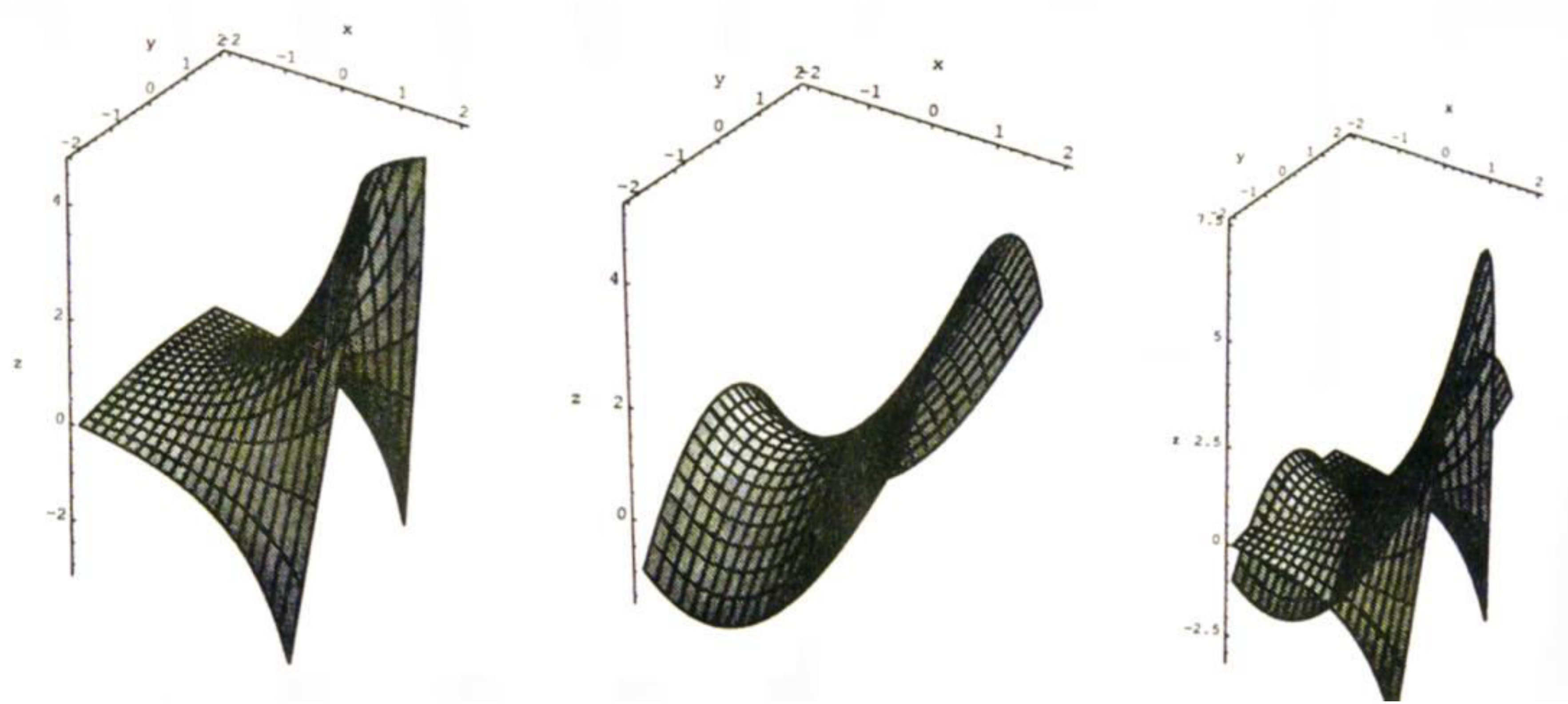
Taylorův polynom 2. stupně

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)\, t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)\, t^n + R_n(t),$$

$$R_n(t) = \frac{F^{(n+1)}(\delta t)}{(n+1)!}t^{n+1}, \delta \in (0,1)$$

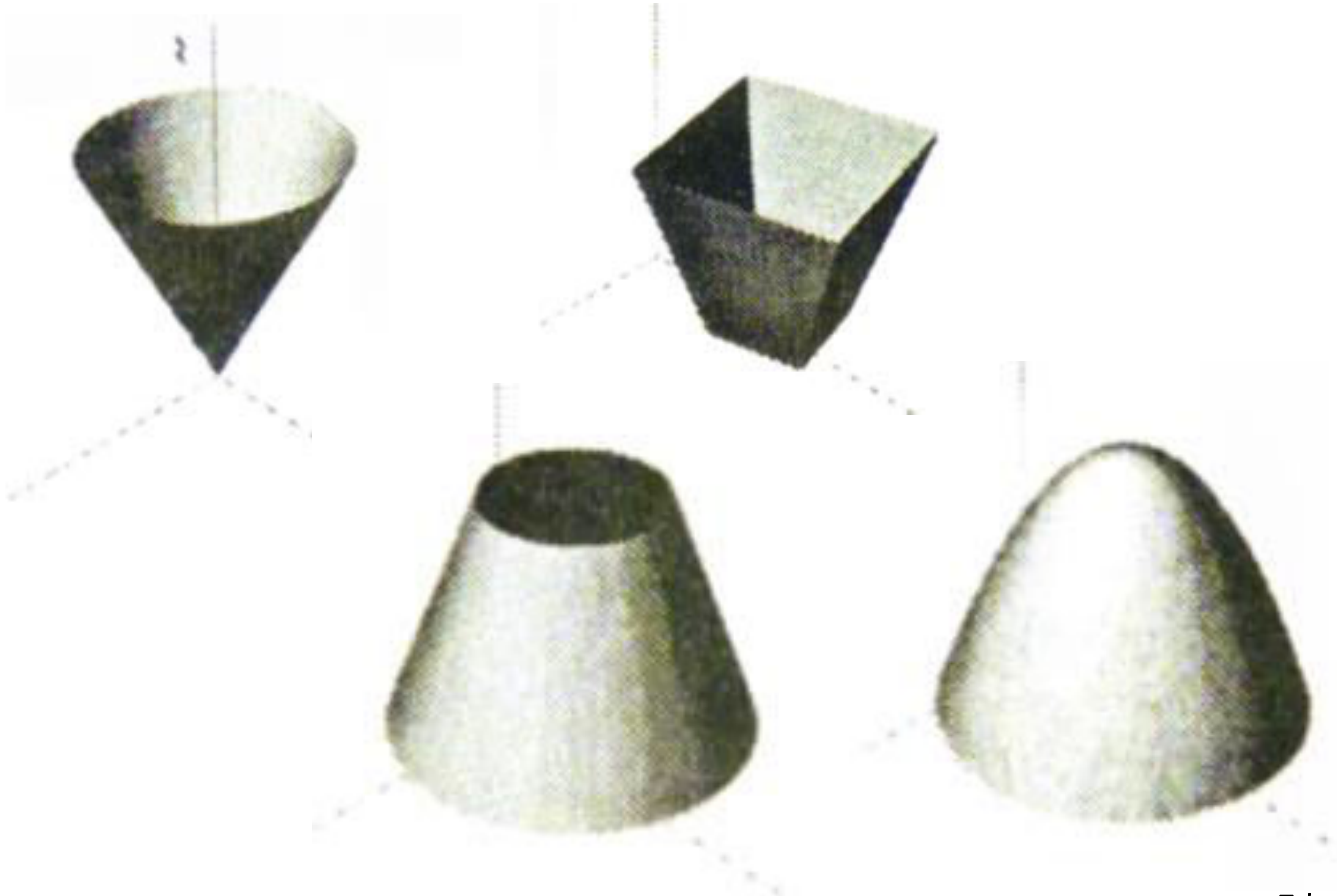
$$f(A + \mathbf{h}) = f(A) + df_A(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}d^2 f_A(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{h})$$

$$z = \mathrm{e}^{x} \cos y \,, [0,0]$$



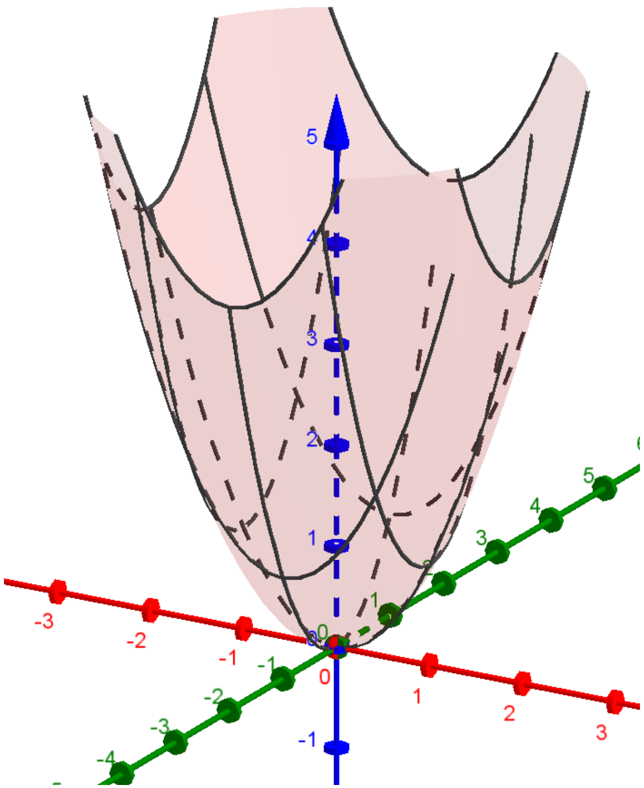
Zdroj: autor

Lokální extrémy fce



Zdroj: autor

Lokální minimum funkce $z = f(x, y)$

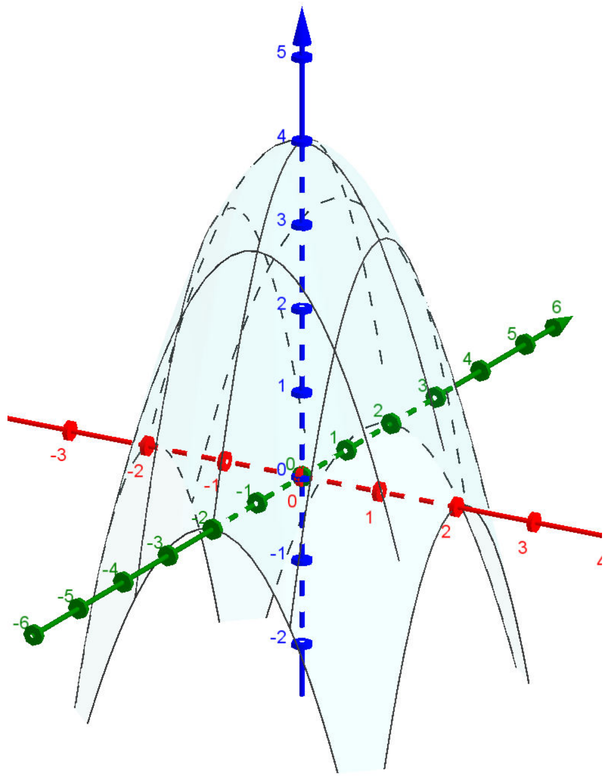


Zdroj: autor

f má v bodě $A \in \mathbf{D}_f$
lokální minimum $f(A)$,
jestliže existuje okolí
$\mathbf{U}(A) \in \mathbf{D}_f$ takové,
že pro každé

$X \in \mathbf{U}(A)$ je $f(X) \geq f(A)$.

Lokální maximum funkce $z = f(x, y)$



Zdroj: autor

f má v bodě $A \in \mathbf{D}_f$
lokální maximum $f(A)$,
jestliže existuje okolí $\mathbf{U}(A) \in \mathbf{D}_f$
takové, že pro každé

$X \in \mathbf{U}(A)$ je $f(X) \leq f(A)$.

Nutná podmínka: $\frac{\partial f(A)}{\partial x} = \frac{\partial f(A)}{\partial y} = 0.$

Postačující podmínka:

Lokální maximum f v A: $d^2 f_A(\mathbf{h})$ *je negativně definitní:*

$$f_{xx}(A) < 0,$$

$$f_{xx}(A) f_{yy}(A) - \left(f_{xy}(A)\right)^2 > 0$$

Lokální minimum f v A: $d^2 f_A(\mathbf{h})$ *je pozitivně definitní*

$$f_{xx}(A) > 0,$$

$$f_{xx}(A) f_{yy}(A) - \left(f_{xy}(A)\right)^2 > 0$$

f nemá v A extrém: $d^2 f_A(\mathbf{h})$ *je indefinitní*

$$f_{xx}(A) f_{yy}(A) - \left(f_{xy}(A)\right)^2 > 0$$

Vázané extrémy – Lagrangeova funkce

Extrémy funkce f na množině $\mathbf{M} = \{[x, y] \in \mathbf{D}_f, g(x, y) = 0\}$.

M je vazba.

f má v $A \in \mathbf{M}$ vázaný extrém na **M**, právě kdy existuje λ, pro které má fce

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$$

v *A* lokální extrém.

Absolutní extrémy funkce

Je-li funkce f spojitá na uzavřené a omezené množině **M**, existují body $A, B \in \mathbf{M}$, ve kterých funkce f nabývá svého maxima a minima.