Obyčejná diferenciální rovnice

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Obyčejná diferenciální rovnice

$F(x, y, y') = 0$ rovnice pro fci $y = y(x\ )$

F je definovaná na $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.

Řád derivace je řád rovnice.

$y = y(x\ )$ je řešení $\Leftrightarrow F\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0$

Cauchyova úloha: hledáme integrální křivku, která prochází daným bodem $[x_0, y_0]$ $-$ počáteční podmínka.

$y' = f(x, y)$ explicitní tvar rovnice

Exaktní diferenciální rovnice

Fce $y = y(x)$ je dána implicitní rovnicí

$$U(x, y) = k.$$

Pro její derivaci platí

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} y' = 0.$$

Z druhé strany, máme-li rovnici

$$P(x, y) + y'Q(x, y) = 0$$

Exaktní diferenciální rovnice

a existuje funkce $U(x,y) = k$ taková, že

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \text{ a } \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

je $U(x,y) = k$, řešením diferenciální rovnice

$$P(x,y) + y' Q(x,y) = 0.$$

Funkci U hledáme tak, aby platilo (podmínka integrity)

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = -\frac{p(x)}{q(y)}, q(y) \neq 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$q(y)dy = -p(x)dx$$

$$\int q(y)dy = -\int p(x)dx + c$$

Příklad: $xy' = (1+x)y, y(1) = \mathrm{e}.$

Lineární diferenciální rovnice

$y' + p(x)y = q(x)$, p,q spojité na $\langle a, b\rangle$

1) $y' + p(x)y = 0$ separace proměnné

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln c \Rightarrow$$

$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$ obecné řešení rovnice 1)

2) Variace konstanty: hledáme řešení tvaru $y = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$

Příklad: $(x+1)y' = x - y, y(0) = 0.$

Diferenciální rovnice s počáteční podmínkou Cauchyova úloha

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0,$$

f a její parciální derivace podle y jsou spojité na okolí $\mathbf{U}([x_0, y_0])$.
Potom

$$\int_{x_0}^{x} y'(x)dx = \int_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big)dx \Rightarrow$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big)dx\,.$$

Integrál je spojitou fcí své horní meze. Tudíž **řešení *y* je spojitá fce**.

Existence a jednoznačnost řešení

$f, \frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité na okolí $\mathbf{U}([x_0, y_0])$.

Sestrojíme posloupnost postupných aproximací řešení

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big) dx \,,$$

$y_0(x) = y(x_0) = y_0,$

$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y_{n-1}(x)\big) dx$

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \int_{x_0}^{x} |f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})| dx$$

Lipschitzova podmínka

Z Lagrangeovy věty

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \left|\frac{\partial f(x,c)}{\partial y}(y_n - y_{n-1})\right| \leq k|x - x_0||y_n - y_{n-1}|$$

kde $\left|\frac{\partial f(x,c)}{\partial y}\right| \leq k$. Potom

$$|y_{n+1} - y_n| \leq k\delta|y_n - y_{n-1}|$$

Pro $k\delta < 1$ posloupnost postupných aproximací konverguje k jedinému řešení Cauchyovy úlohy.

Pro rovnici $y' = x^2 + y,\ y(0) = 0$ určíme hodnotu integrální křivky v 0.5 s přesností 10^{-4}.

- $y_1(x) = \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3}x^3, y_1(0.5) \doteq 0.041\,\overline{6}$,
- $y_2(x) = \int_0^x \left(x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4, y_2(0.5) \doteq 0.046\,874\,\overline{9}$,
- $y_3(x) = \int_0^x \left(x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}x^5, y_3(0.5) \doteq 0.047\,395\,832$,
- $y_4(x) = \int_0^x \left(x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{360}x^6$,
- $y_4(0.5) \doteq 0.047\,439\,234.$
- $|y_4 - y_3| \doteq 0.000\,043\,402$

Eulerova metoda

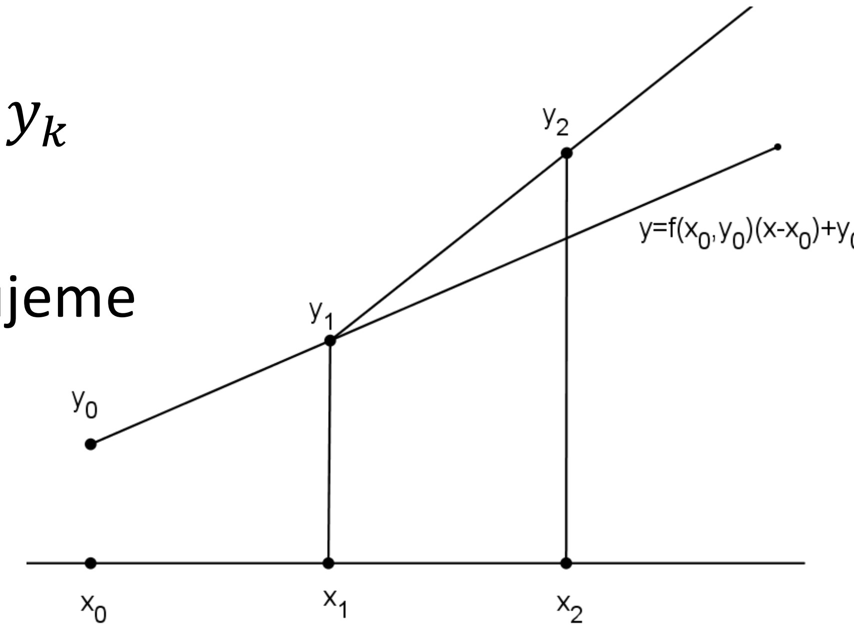
Cauchyova úloha: $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$

Posloupnost postupných aproximací:

$y(x_0) = y_0,$

$y_{k+1} = f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + y_k$

Na intervalu $\langle x_n, x_{n+1} \rangle$ aproximujeme integrální křivku její tečnou v bodě $X_n = [x_n, y_n]$.



Zdroj: autor

Metoda Rungova-Kuttova 2.ř.

Rekurentní vzorec hledáme ve tvaru

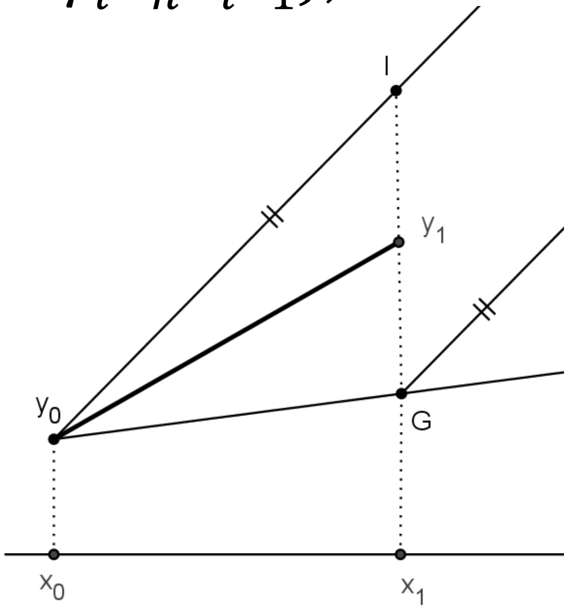
$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^{m} \propto_i k_i \,, n \geq 0,$$

kde $k_1 = f(x_n, y_n), k_i = f(x_n + \beta_i h_n, y_n + \gamma_i h_n k_{i-1}), i > 0.$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$



Zdroj: autor

Pro rovnici $y' = x^2 + y,\ y(0) = 0$ určíme hodnotu integrální křivky v 0.5 s přesností 10^{-4}.

Eulerovou metodou: $h = 0.1$: $y_{k+1} = y_k + h\left(x_k^2 + y_k\right)$

x_i	x_i^2	y_i	$h\left(x_i^2 + y_i\right)$	y_{i+1}
0	0	0	0	0
0.1	0.01	0	0.001	0.001
0.2	0.04	0.001	0.004 1	0.005 1
0.3	0.09	0.005 1	0.009 51	0.014 61
0.4	0.16	0.014 61	0.017 461	0.032 071
0.5		0.032 071		

Zdroj: autor

Pro rovnici $y' = x^2 + y,\ y(0) = 0$ určíme hodnotu integrální křivky v 0.5 s přesností 10^{-4}.

x_i	x_i^2	y_i	k_1	k_2	$(k_1 + k_2)/2$	y_{i+1}
0	0	0	0	0.001	0.000 5	0.000 5
0.1	0.01	0.000 5	0.001	0.004 2	0.002 6	0.003 1
0.2	0.04	0.003 1	0.004	0.009 7	0.007 0	0.010 1
0.3	0.09	0.010 1	0.010	0.018 0	0.014 0	0.024 1
0.4	0.16	0.024 1	0.018	0.029 3	0.023 8	0.048 0
0.5	0.25	0.048 0				

Zdroj: autor

Runge-Kuttova metoda 2.ř.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) = h({x_n}^2 + y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) = h({x_{n+1}}^2 + y_n + k_1)$$

Metoda Rungova-Kuttova 4.ř.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$