Obyčejné diferenciální rovnice

Stabilita řešení počátečních úloh

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Diferenciální rovnice 2. řádu

- Implicitní tvar: $F(x, y, y', y'') = 0$.
- Explicitní tvar: $y'' = f(x, y, y')$.

- Rovnici lze převést na soustavu 2 diferenciálních rovnic 1. řádu:
- $y' = y_1$
- $y'_1 = f(x, y, y_1)$

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty, homogenní

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad a, b \in \mathbf{R}.$$

Prostor řešení:

- s každým řešením *y* řeší rovnici násobek *c y,*
- jsou-li y_1, y_2 dvě řešení rovnice, je $y_1 + y_2$ také řešení,
- každá lineární kombinace $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ dvou řešení je také řešení.

Bázi vektorového prostoru řešení $\{y_1, y_2\}$ nazýváme **fundamentální systém** rovnice.

Wronského determinant

Vektory y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé.

Integrální konstanty jsou řešením soustavy rovnic

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$
$$c_1 y'_1 + c_2 y'_2 = 0$$

Determinant matice soustavy je Wronskijan

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = W(x)$$

- funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé na **M**, právě když $W(x) \neq 0$ na **M**,
- funkce y_1, y_2 jsou lineárně závislé na **M**, právě když $W(x) = 0$ na **M.**

Charakteristická rovnice

$y = \mathrm{e}^{\lambda x}, \alpha \in \mathbf{R}$ je řešení rovnice $y'' + ay' + by = 0$, potom

$$\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ je charakteristická rovnice

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \Rightarrow y = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \ \in \mathbf{R} \Rightarrow y_1 = \mathrm{e}^{\lambda x},\ y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda x} \Rightarrow y = c_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 x\, \mathrm{e}^{\lambda x}.$
- $\lambda = \lambda_1 + \mathrm{i} \ \Rightarrow y = \mathrm{e}^{(\lambda_1 + \mathrm{i}\,\lambda_2)x} = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\mathrm{e}^{i\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}(\cos \lambda_1 x + \mathrm{i}\ \sin \lambda_2 x).$
  $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \cos \lambda_1 x,\ y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$

  $y = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \cos \lambda_1 x + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x.$

Diferenciální rovnice *n*-tého řádu

- Implicitní tvar: $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0.$
- Explicitní tvar: $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right).$

lze převést na soustavu *n* diferenciálních rovnic 1. řádu:

$$y' = y_1$$
$$y'_1 = y_2$$
$$y'_2 = y_3$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y'_{n-1} = f(x, y, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})$$

Soustava obyčejných diferenciálních rovnic

$$y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

…………………

$$y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

Počáteční podmínky: $y_1(a) = b_1,\ \cdots\ , y_n(a) = b_n$

Soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \cdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{y}$$

řešení hledáme ve tvaru:

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n),$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{c}\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} = \boldsymbol{A}\,\mathbf{c}\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E})\,\mathbf{c} = \mathbf{o}$$

charakteristická rovnice: $|\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E}| = 0$

λ je vlastní číslo, $\mathbf{c}$ je vlastní vektor matice $\boldsymbol{A}$

Různá reálná vlastní čísla

Řešme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Stacionární body

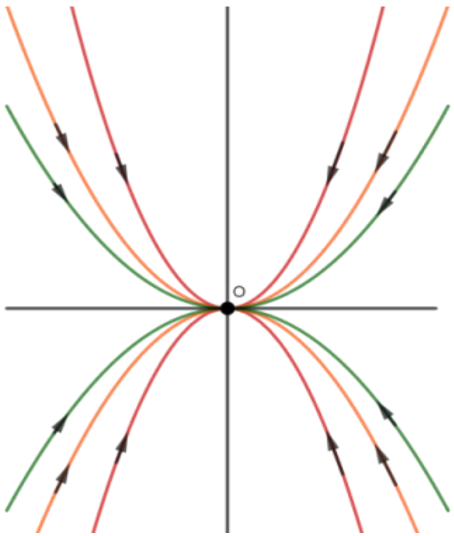
Řešení: $\mathbf{y} = \mathrm{e}^{\lambda x}(c_1, c_2)$

Charakteristická rovnice:

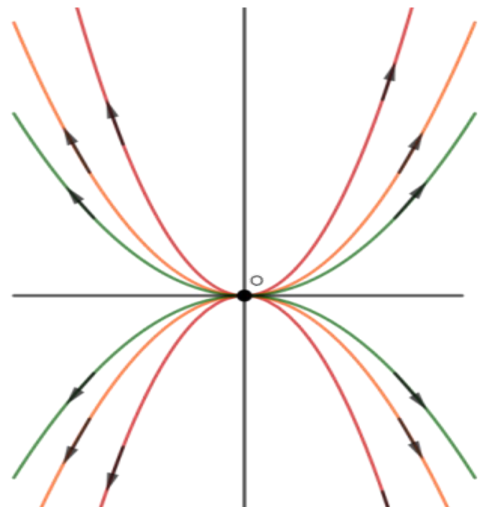
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + |A| = 0$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{y} = k_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x}(c_1, c_2) + k_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}(d_1, d_2)$

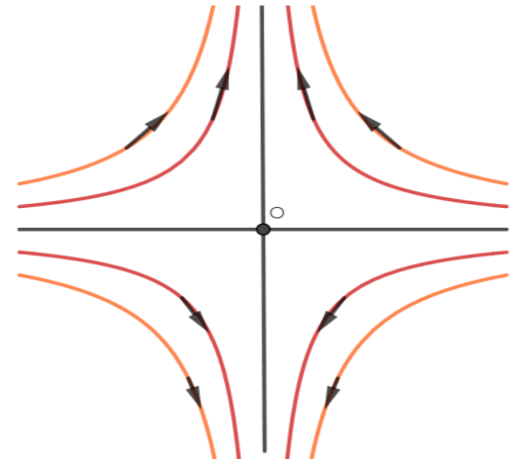
Bod $[0,0]$ je asymptoticky $(x \to \infty)$



$k_1 < 0, k_2 < 0$
stabilní – uzel



$k_1 > 0, k_2 > 0$
nestabilní – uzel



$k_1\, k_2 < 0$
sedlo

Zdroj: autor

Stabilita řešení

$$y_i = \varphi_i(x, a, b_1, \cdots, b_n), i = 1, \cdots, n$$

je řešení soustavy

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

s počátečními podmínkami $y_i(a) = b_i$

f_i spojité na Ω $\Rightarrow$ φ_i jsou spojité

Stabilita řešení

Řešení je stabilní, jestliže

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0, \forall \; x \geq a$ je
$|\varphi_i(x, a, c_1, \cdots, c_n) - \varphi_i(x, a, b_1, \cdots, b_n)| < \varepsilon \Leftrightarrow |c_i - b_i| < \delta.$

Řešení je asymptoticky stabilní, jestliže

$\exists \; \vartheta > 0, \lim_{x \to +\infty} |\varphi_i(x, a, c_1, \cdots, c_n) - \varphi_i(x, a, b_1, \cdots, b_n)| = 0 \Leftrightarrow$
$|c_i - b_i| < \vartheta.$

Hurwitzův polynom

Řešení soustavy

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{y}$$

je asymptoticky stabilní, právě když každé řešení charakteristické rovnice

$$|A - \lambda E| = 0$$

má zápornou reálnou část. tj. $|A - \lambda E|$ je hurwitzův polynom.

Hurwitzovo kritérium

všechny hlavní subdeterminanty hurwitzovy matice

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

jsou kladné.