Konečné a numerické řešení soustav algebraických rovnic

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Konečné metody

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

A je regulární, potom existuje právě jedno řešení

- Gaussova eliminace
- Cramerovo pravidlo
- Inverzní maticí
- LU rozklad

LU rozklad

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ l_{n-1,1} & \cdots & \cdots & 1 & & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

LU rozklad

L je dolní (lower) trojúhelníková matice, $l_{ii} = 1$
U je horní (upper) trojúhelníková matice
Rozklad matice A = LU je určen jednoznačně.

$$u_{11} = a_{11}$$
$$l_{i1} = a_{i1}/u_{11}\,, i = 2, \cdots, n$$
$$u_{1k} = a_{1k}$$
$$u_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}u_{jk}\,, i = 2, \cdots, k$$

$$l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}u_{jk}\right), i = k+1, \cdots, n, k = 2, \cdots, n$$

LU pro třídiagonální matice

$$
\begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots \\
a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots \\
0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & a_n & b_n
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\beta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 & \dots \\
0 & \alpha_3 & \beta_3 & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & \alpha_n & \beta_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & u_2 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 1 & u_3 & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & u_n \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_1 u_2 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_2 & \alpha_2 u_2 + \beta_2 & \beta_2 u_3 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_3 u_3 + \beta_3 & \beta_3 u_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n & \alpha_n u_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = b_1 \qquad u_2 = \frac{c_1}{\beta_1}$$

$$\alpha_2 = a_2 \qquad \beta_2 = b_2 - \alpha_2 u_2 \qquad u_3 = \frac{c_2}{\beta_2}$$

....

$$\alpha_{n-1} = a_{n-1} \qquad \beta_{n-1} = b_{n-1} - \alpha_{n-1} u_{n-1} \qquad u_n = \frac{c_{n-1}}{\beta_{n-1}}$$

$$\alpha_n = a_n \qquad \beta_n = b_n - \alpha_n u_n$$

Norma matice

Norma $\|A\|$ čtvercové matice A je číslo

$$\|A\| \geq 0,$$

- $\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0,$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|,$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$
- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \Rightarrow$
  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$

Normy matic

- Řádková norma matice

$$\|A\|_R = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- Sloupcová norma matice

$$\|A\|_S = \max_{j=1,\cdots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- Euklidovská norma matice

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

$\|A\|\|A^{-1}\|$ číslo podmíněnosti

Podmíněnost soustavy (matice) $Ax = b$:

Chybou zatížené řešení a pravá strana

$$A(x + \delta x) = b + \delta b,$$

$$A(x + \delta x) - Ax = b + \delta b - b \Rightarrow A\,\delta x = \delta b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b.$$

Pro normy $\quad \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|,$

$$\|b\| \leq \|A\|\|x\|,$$

$$\|b\|\|\delta x\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|\|x\|\|\delta b\|.$$

Relativní chyba $\quad \dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$

Iterační metody pro $Ax = b$

Iterační tvar:

$$Ax = b \Rightarrow x = Bx + c$$

Posloupnost postupných aproximací:

$$x^{(0)},\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

Podmínka pro konec procesu: počet členů posloupnosti nebo

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| < \varepsilon$$

Postačující podmínka konvergence:

$$\|B\| \leq q < 1,$$

Chyba výpočtu

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| = \left\|\boldsymbol{B}\,\mathbf{x}^{(k-1)} - \boldsymbol{B}\,\mathbf{x}^*\right\| =$$

$$= \left\|\boldsymbol{B}\left(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right)\right\|$$

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| \leq \frac{q}{1-q}\,\varepsilon.$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*,\ \boldsymbol{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$$

Jacobiova metoda

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{C},$$

D je diagonálně dominantní, $c_{ii} = 0$

$$(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{C})\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$\boldsymbol{D}\mathbf{x} = -\boldsymbol{C}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{D}^{-1}\mathbf{b}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right), \qquad i = 1, \cdots, n$$

Řešení soustavy: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$,

Diagonálně dominantní soustava: $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$,

Rekurentní vzorec:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\left\| x^{(4)} - x^{(3)} \right\| = 0.44217,\ q = \frac{4}{5}, \frac{q}{1-q} = 4,$$

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} \\ \frac{23}{25} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{57}{100} \\ \frac{51}{50} \\ -\frac{273}{500} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.57 \\ 1.02 \\ -0.546 \end{pmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{59}{125} \\ \frac{904}{625} \\ -\frac{241}{500} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.472 \\ 1.4464 \\ -0.482 \end{pmatrix}$$

$$q = \frac{4}{5}, \frac{q}{1-q} = 4,$$

$$\left\| x^{(4)} - x^{(3)} \right\| = 0.44217$$

Přesné řešení: $x^* = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

Gauss-Seidlova metoda

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)}\right)$$

Symbolický zápis:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} + U_{\nabla}\mathbf{x}^{(k)} + L_{\Delta}\mathbf{x}^{(k+1)}$$

Řešení soustavy: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{12}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.6 \\ -0.48 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.61 \\ 0.948 \\ -0.4884 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow (A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{o}$$

λ – vlastní číslo,

$\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ – vlastní vektor

$|A - \lambda E| = 0$ charakteristická rovnice

A symetrická matice

- Všechna vlastní čísla jsou reálná.
- Různým vlastním číslům odpovídají ortogonální vlastní vektory.
- *k*-násobnému vlastnímu číslu odpovídá *k* ortogonálních vektorů.
- Pozitivně definitní matice má vlastní čísla kladná.

Mocninná metoda pro $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = A\boldsymbol{x}^{(0)} = \alpha_1 A\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n A\boldsymbol{u}_n$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \boldsymbol{u}_n$$

....

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = A\boldsymbol{x}^{(k-1)} = \alpha_1 \lambda_1^{k-1} A\boldsymbol{u}_1 + \cdots \alpha_n \lambda_n^{k-1} A\boldsymbol{u}_n$$

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^{k} \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^{k} \boldsymbol{u}_n$$

Mocninná metoda pro $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \lambda_1^k(\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}_k)$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \lambda_1^{k+1}(\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}_{k+1})$$

$$w_{kj} = \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k u_{2j} + \alpha_3 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k u_{3j} + \ldots..$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_j^{(k+1)}}{x_j^{(k)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1^{k+1}}{\lambda_1^k} = \lambda_1$$

Maximální vlastní číslo matice: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A\mathbf{x}^{(0)}$	$A^2\mathbf{x}^{(0)}$	$A^3\mathbf{x}^{(0)}$	$A^4\mathbf{x}^{(0)}$	$A^5\mathbf{x}^{(0)}$	$A^6\mathbf{x}^{(0)}$	$A^7\mathbf{x}^{(0)}$	$A^8\mathbf{x}^{(0)}$	$A^9\mathbf{x}^{(0)}$	$A^{10}\mathbf{x}^{(0)}$
5	24	111	504	2268	10161	45433	202833	905238	4038939
4	15	60	252	1089	4779	21141	93906	417987	1862460
2	6	21	81	333	1422	6201	27342	121248	539235

Zdroj: autor

$$\frac{x_1^{10}}{x_1^9} = 4.462, \frac{x_2^{10}}{x_2^9} = 4.456, \frac{x_3^{10}}{x_3^9} = 4.447$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}(4.462 + 4.456 + 4.447) = 4.447 \doteq 4.46$$

$$\mathbf{u}_1 = (4\ 038\ 939{,}1\ 862\ 460{,}539\ 235)$$