Numerická derivace a integrál

funkce 1 proměnné

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Numerická derivace

- Lagrangeův interpolační polynom pro 3 body:
  $$[x_0, y_0], \qquad [x_0 + h, y_1], \qquad [x_0 + 2h, y_2]$$

- $L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_0-h)(x-x_0-2h)}{2h^2} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_0-2h)}{-h^2} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2h^2}$
- Substituce: $x - x_0 = ht$
- $L_2(x) = y_0 \frac{(t-1)(t-2)}{2} - y_1 t(t-2) + y_2 \frac{t(t-1)}{2}$

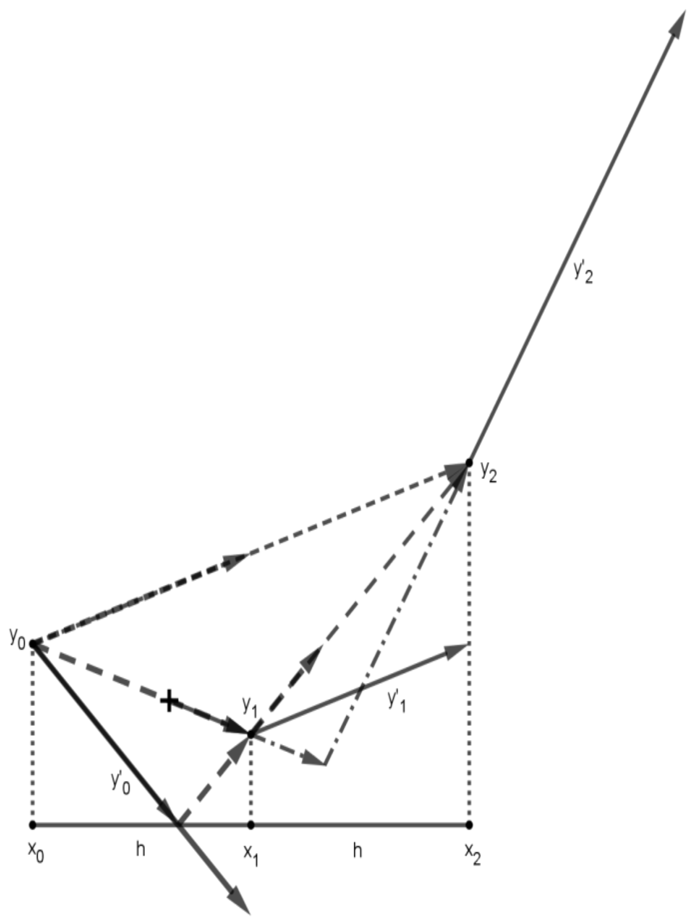
- $L'_2(x) = \frac{1}{2h}(y_0(2t-3) - 4y_1(t-1) + y_2(2t-1))$

- $[x_0, y_0] \Rightarrow\ t = 0 \Rightarrow y'(x_0) =\ \frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h}$

- **1. centrální diference:**
- $[x_0 + h, y_1] \Rightarrow\ t = 1 \Rightarrow\ y'(x_1) =\ \frac{-y_0+y_2}{2h}$

- $[x_0 + 2h, y_2] \Rightarrow\ t = 2 \Rightarrow\ \ y'(x_2) =\ \frac{y_0-4y_1+3y_2}{2h}$

- **2. centrální diference**: $L''_2(x) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$



$$y'(x_0) = \frac{3}{2h}\left[(y_1 - y_0) - \frac{1}{3}(y_2 - y_1)\right],$$
$$y'(x_1) = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0),$$
$$y'(x_2) = \frac{3}{2h}\left[(y_2 - y_1) - \frac{1}{3}(y_1 - y_0)\right]$$

Zdroj: autor

Určitý integrál

Graf funkce f spojité a nezáporné na $\langle a, b\rangle$, určuje v rovině množinu

$$\mathbf{M} = \{[x, y] \in R^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Její obsah je ***určitý integrál*** od *a* (dolní mez) do *b* (horní mez) z funkce *f*

$$\int_a^b f(x)dx$$

Určitý integrál funkce $\int_a^b f(x)\,dx$

Vlastnosti:

- $\int_a^b \propto f(x)dx = \propto \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in \langle a, b\rangle$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$

- Je-li f spojitá na $\langle a, b\rangle$, existuje $c \in \langle a, b\rangle$ takové, že $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, tj. **střední hodnota funkce** f na $\langle a, b\rangle$.

Primitivní funkce F k funkci f a neurčitý integrál

Primitivní funkce *F* ke spojité funkci *f* na $\langle a, b\rangle$ je funkce

$$F\colon \begin{cases} a \to \int_a^a f(x)dx \\ t \to \int_a^t f(x)dx \quad , t \in \langle a, b\rangle. \\ b \to \int_a^b f(x)dx \end{cases}$$

- Funkce *F* je spojitá na $\langle a, b\rangle$.
- Derivace $F'(t) = f(t)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.
- $F(t) = \int f(t)dt + c$ (neurčitý integrál)

Newtonův-Leibnizův vzorec

F je primitivní funkce k funkci f na $\langle a, b \rangle$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

Metoda per partes

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b -$$

$$- \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$$

Substituční metoda

$t = g(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$, $g' \neq 0$ na $\langle a, b \rangle$

$y = f(t)$ spojitá na $\langle g(a), g(b) \rangle$

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Nevlastní integrál

f neomezená na (a, b), $a, b \in (-\infty, +\infty)$,

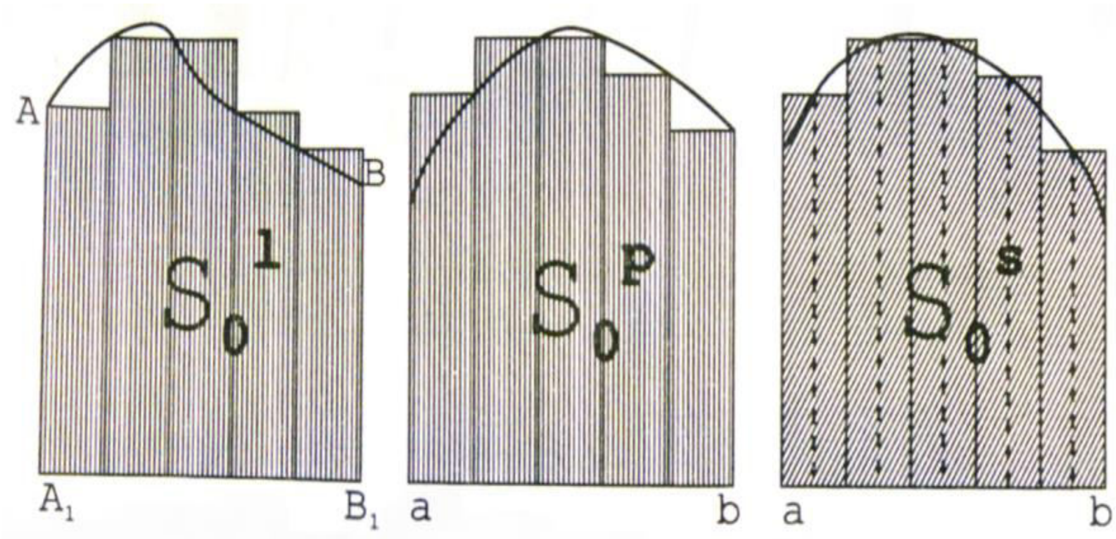
F primitivní funkce k funkci f na (a, b)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x)$$

Numerický výpočet integrálu

Aproximace rovinného obrazce obdélníky, aproximace funkce f konstantní funkcí.

Zdroj: autor



$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Obdélníková pravidla

$$S_O^l = h\big(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\big)$$

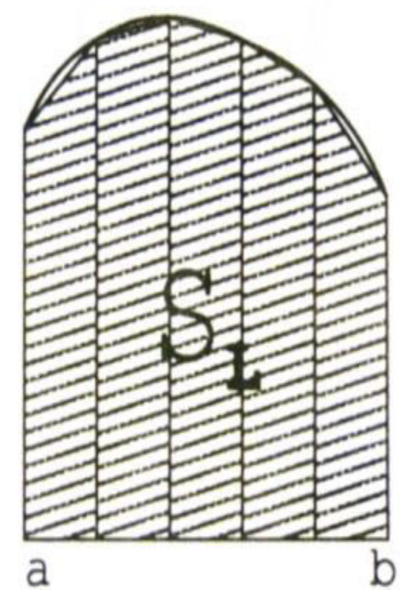
$$S_O^p = h\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big)$$

$$S_O^s = h\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right)$$

Lichoběžníkové pravidlo

Aproximace rovinného obrazce lichoběžníky, aproximace funkce f lineární funkcí.

$$S_L = h\left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

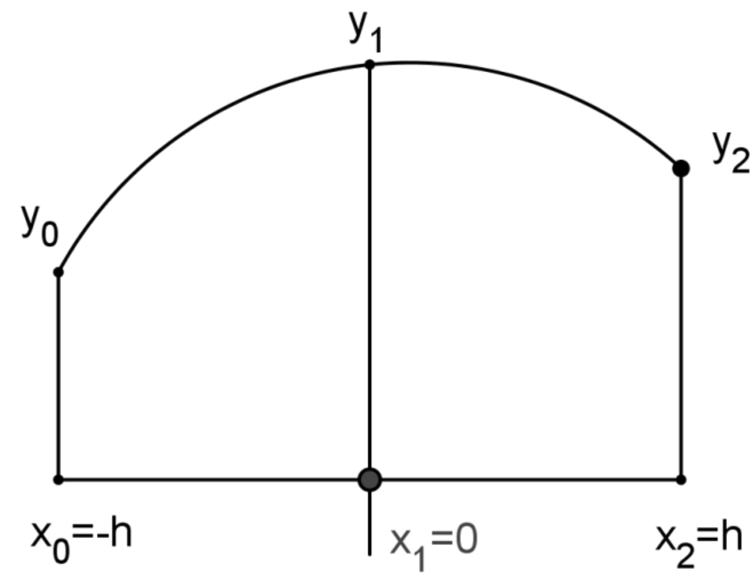


Zdroj: autor

Simpsonovo pravidlo

Aproximace funkce f kvadratickou fcí

$$y = Ax^2 + Bx + C$$



$$f(x_0) = Ah^2 - Bh + C,$$

$$f(x_1) = C,$$

$$f(x_2) = Ah^2 + Bh + C$$

$$\int_{-h}^{h}(ax^2 + bx + c)dx = \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big)$$

Zdroj: autor

$$S_S = \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + f(x_n)\big)$$

Chyby kvadraturních vzorců

Obdélníková pravidla: $\leq (b-a)\frac{h^2}{24}M_2$

Lichoběžníkové pravidlo: $\leq (b-a)\frac{h^2}{12}M_2$

Simpsonovo pravidlo: $\leq (b-a)\frac{h^4}{180}M_4$

$$M_i = \max_{\langle a,b\rangle}\left|f^{(i)}(x)\right|$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

n	S_O^l	S_O^p	S_O^s	S_L	
2	0,125	0,625	0,312 5	0,375	
4	0,218 75	0,468 75	0,328 125	0,343 75	
8	0,269 531 25	0,398 437 5	0,332 031 25	0,333 984 375	

Zdroj: autor