Parciální diferenciální rovnice

a metoda sítí

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Parciální diferenciální rovnice

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \cdots\right) = 0$$

pro funkci $z = z(x_1, \cdots, x_n)$.

Řád nejvyšší derivace je řádem rovnice.

Řešení rovnice:

- Cauchyův problém: řešení s počáteční podmínkou
- Dirichletův problém: řešení s okrajovými podmínkami
- Neumannův problém: spojité řešení se spojitými 1.derivacemi a danými hodnotami na hranici množiny.

Parciální diferenciální rovnice 1. řádu

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

je rovnice pro funkci $z = z(x, y)$ nezávisle proměnných *x, y*.

Graf funkce *z* je plocha.

Parciální diferenciální lineární rovnice 1.ř.

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R,$$

kde *P, Q, R* jsou funkce proměnných *x, y, z.*

Je-li funkce *z* daná implicitní rovnicí $F(x, y, z) = 0$, potom její parciální derivace jsou

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

a po dosazení do diferenciální rovnice je

$$P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} + R\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Lineární rovnice 1. ř.

Porovnáním s totálním diferenciálem funkce F

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

dostaneme soustavu (tří) obyčejných diferenciálních rovnic v kanonickém tvaru

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Parciální diferenciální rovnice 2. řádu

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0.$$

Lineární rovnice 2. ř. pro funkci $z = z(x, y)$:

$$A_{11}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2A_{12}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A_{22}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + B_1\frac{\partial z}{\partial x} + B_2\frac{\partial z}{\partial y} + Cz + D = 0,$$

kde A_{ij}, B_k, C, D jsou spojité funkce x, y.

Lineární rovnice 2. ř.

$$A_{11}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2A_{12}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A_{22}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + B_1\frac{\partial z}{\partial x} + B_2\frac{\partial z}{\partial y} + Cz + D = 0,$$

$$\left\{\begin{matrix} A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 > 0 \\ A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 < 0 \\ A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{rovnice nazývá} \left\{\begin{matrix} \text{eliptická} \\ \text{hyperbolická} \\ \text{parabolická} \end{matrix}\right\}$$

na $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^2$.

Kanonický tvar rovnice

Eliptická a hyperbolická rovnice:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y} + cz + d = 0$$

Parabolická rovnice:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y} + cz + d = 0$$

Eliptická rovnice

Laplaceova:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Poisonova:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

Hyperbolická rovnice

Vlnová rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Kmitání struny:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Parabolická rovnice

Rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(x, y, z, t)$$

Black–Scholesova rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

Black–Scholesova rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

- f je cena opce, funkce cen akcií S v čase t
- r je bezriziková úroková sazba
- σ je volatilita akcií

Okrajové podmínky:

Pro evropskou call opci (kupní právo):

- $f(S,T) = \max_S\{S - K, 0\}, f(0,t) = 0,$
  $f(S_{max}, t) = S_{max} - Ke^{-r(T-t)}$

Pro evropskou put opci (prodejní právo):

- $f(S,T) = \max_S\{K - S, 0\}, f(S_{max}, t) = 0,$
  $f(0,t) = S_{max} - Ke^{-r(T-t)}$

Metoda sítí

pro diferenciální rovnice

Okrajová úloha

Lineární diferenciální rovnice 2.ř.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Okrajové podmínky: $y_0 = t_0,\ y_n = t_1$

$$x_i = x_0 + ih,\ h = \frac{1}{n}(b-a), i = 0, \cdots, n, y(x_i) = y_i$$

Dosazením diferencí za derivace → **síťová rovnice**

Numerická derivace

- Diference vpřed: $f'(x) \doteq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Diference vzad: $f'(x) \doteq \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$
- Centrální diference: $f'(x) \doteq \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$
- 2.centrální diference: $f''(x) \doteq \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$

Síťová rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i,$$

$i = 1, \cdots, n - 1$

$n - 1$ rovnic pro $n + 1$ neznámých hodnot y_i

$$(2 - hp_i)y_{i-1} + (2h^2q_i - 4)y_i + (2 + hp_i)y_{i+1} = 2f_ih^2$$

- $i = 1$ $\quad B_1y_1 + C_1y_2 = D_1,$
- $i = 2, \cdots, n-2$ $\quad A_iy_{i-1} + B_iy_i + C_iy_{i+1} = D_i,$
- $i = n-1$ $\quad A_{n-2}y_{n-2} + B_{n-1}y_{n-1} = D_{n-1},$

- $i = 1$ $\quad A_1 = 0,$
- $i = 2, \cdots, n-1$ $\quad A_i = 2 - hp_i$
- $i = 1, \cdots, n-1$ $\quad B_i = 2q_ih^2 - 4$
- $i = 1, \cdots, n-2$ $\quad C_i = 2 + hp_i$
- $i = n-1$ $\quad C_{n-1} = 0$

- $i = 1$ $\quad D_1 = 2f_1h^2 - t_0(2 - hp_1)$
- $i = 2, \cdots, n-2$ $\quad D_i = 2h^2f_i$
- $i = n-1$ $\quad D_{n-1} = 2f_{n-1}h^2 - t_1(2 + hp_{n-1})$

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n-2} & B_{n-2} & C_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-1} & B_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix}$$

Síťová rovnice pro Black–Scholesovu rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

$$\frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{k} + rih\frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} \quad + \frac{1}{2}\sigma^2 h^2 i^2 \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2} = rf_{i,j}$$

$$\boldsymbol{f_{i,j-1} = a_i f_{i-1,j} + b_i f_{i,j} + c_i f_{i+1,j}}$$

$$i = 1,2,\cdots,m-1, \qquad j = n-1, n-2, \cdots, 1,0$$

$$a_i = \frac{1}{2}k(\sigma^2 i^2 - ri),$$
$$b_i = 1 - k(\sigma^2 i^2 + rh^2),$$
$$c_i = \frac{1}{2}k(\sigma^2 i^2 + ri)$$

Soustava síťových rovnic

Pro každé $j = n-1, n-2, \cdots, 1,0$ řešíme soustavu $m-1$ rovnic pro $m-1$ neznámých

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1j} \\ f_{2j} \\ \vdots \\ f_{m-1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,j-1} - a_1 f_{0j} \\ f_{2,j-1} \\ \vdots \\ f_{m-2,j-1} \\ f_{m-1,j+1} - c_{m-1} f_{mj} \end{pmatrix}$$

FEMLAB