

FINANČNÍ MATEMATIKA 1BP310

PŘEDNÁŠEJÍCÍ:
Jarmila Radová



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

The logo of the Ministry of Education, Youth and Sports (MŠMT) is located in the bottom right corner. It features the letters 'MŠMT' in a stylized font.
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontakt

- Radová
 - Tel: 224 095 102
 - E-mail: radova@vse.cz
 - Místnost 180 NB, online
 - Konzultace
 - Po 11:00 - 12:30

Budoucí hodnota annuity Spoření

- pravidelné ukládání určitých částek
- pro naše účely pravidelné úložky ve stejné výši (konstantní annuity)
- Zajímá nás budoucí hodnota
 - Možno zahrnout poplatky – viz stavební spoření
 - Možno zahrnout daně (nutno)

Krátkodobé spoření

- v rámci 1 úrokového období
- úroky přičteny na konci
- jednoduché úročení
- úroky tvoří aritmetickou posloupnost
- ukládáme-li částku počátkem dílčího období (měsíce apod.), jedná se o předlhůtní spoření
- ukládáme-li částku koncem dílčího období, jedná se o spoření polhůtní

Úložka číslo	Doba uložení	Budoucí hodnota úložky - předl	Budoucí hodnota úložky - polh	
1	m/m	$x.(1 + i.m/m)$		
2	$(m - 1)/m$	$x.(1 + i.(m - 1)/m)$	$x.(1 + i.(m - 1)/m)$	1
3	$(m - 2)/m$	$x.(1 + i.(m - 2)/m)$	$x.(1 + i.(m - 2)/m)$	2
4			$x.(1 + i.(m - 3)/m)$	3
...
m	1/m	$x.(1 + i.1/m)$	$x.(1 + i.1/m)$	m-1
			X	m

m ...počet dílčích období (vkladů),

A ...výše vkladu (anuita)

i ...úroková míra

Předlůtní:

$$FV = Am + U = Am \left(1 + \frac{m+1}{2m} i \right)$$

Polhůtní:

$$FV = Am + U = Am \left(1 + \frac{m-1}{2m} i \right)$$

Příklad:

Vypočítejte naspořenou částku na konci roku, když se bude ukládat na počátku (konci) každého měsíce 1000 Kč při úrokové sazbě 12% p.a. Úroky jsou připisovány ročně.

Řešení:

Předlhůtně 12 780 Kč

Polhůtně 12 660 Kč

Dlouhodobé spoření

- každé úrokové období je vložena jedna úložka
- více úrokových období (n)

Předhůtní:

$$\begin{aligned}
 FV &= A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + \dots + A(1+i)^1 = A(1+i)[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1] \\
 &= A(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = A(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}
 \end{aligned}$$

Polhůtní:

$$\begin{aligned}
 FV &= A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \dots + 1 = A[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1] = A \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\
 &= A \frac{(1+i)^n - 1}{i}
 \end{aligned}$$

Úložka číslo	Doba uložení	Budoucí hodnota předlhůtní	Budoucí hodnota polhůtní	
1	n	$a.(1 + i)^n$		
2	n - 1	$a.(1 + i)^{n - 1}$	$a.(1 + i)^{n - 1}$	1
3	n - 2	$a.(1 + i)^{n - 2}$	$a.(1 + i)^{n - 2}$	2
...	$a.(1 + i)^{n - 3}$	3
n	1	$a.(1 + i)^1$	$a.(1 + i)^1$	n-1
			$a.(1 + i)^0$	n

$$S'_n = a * (1 + i) * \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Poznámka: člen $s'_n = (1 + i) * \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$
se

nazývá střadatel předlhůtní a udává, kolik se naspoří za n období při úrokové sazbě i , pokud se na počátku každého období ukládá částka

1 Kč

$$S_n = a * \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Poznámka: člen $s_n = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$

se nazývá střadatel polhůtní a udává, kolik se naspoří za n období při úrokové sazbě i, pokud se na konci každého období ukládá částka 1 Kč

Vztah mezi středateli, že

$$s'_n = (1 + i) * s_n$$

Příklad 1

Doted' jsme spořili počátkem každého čtvrtletí 2 500 Kč při 6% p.a. a pololetním připisování úroků. Na stejném účtu chceme spořit i nadále, ovšem chceme ukládat peníze koncem každého měsíce. Kolik musí činit výše měsíční úložky, aby se celková naspořená částka ani doba spoření nezměnila?

Řešení

Pro obecné n musí dle zadání platit:

$$Am_1 \left(1 + \frac{m_1 + 1}{2m_1} i\right) \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = Xm_2 \left(1 + \frac{m_2 - 1}{2m_2} i\right) \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$2500 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot 0,03\right) \frac{1,03^n - 1}{0,03} = X \cdot 6 \cdot \left(1 + \frac{5}{12} \cdot 0,03\right) \frac{1,03^n - 1}{0,03}$$

Z toho pak

$$X = 841,56 \text{ Kč}$$

Příklad 2

Jak dlouho musí klient spořit koncem každého čtvrtletí částku 18 000 Kč, aby naspořil částku 700 000 Kč při úrokové sazbě 4,83 % p.a. a čtvrtletním připisování úroků? Úroky jsou zdaněny srážkovou daní ve výši 15%.

Řešení

Ze zadání platí

$$18000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,0483}{4} \cdot 0,85\right)^{4n} - 1}{\frac{0,0483}{4} \cdot 0,85} = 700\,000$$

Po úpravě

$$\left(1 + \frac{0,0483}{4} \cdot 0,85\right)^{4n} = \frac{700\,000 \cdot \frac{0,0483}{4} \cdot 0,85}{18000} + 1$$

Rovnici logaritmujeme a po úpravě máme

$$n = \frac{\log\left(\frac{700\,000 \cdot \frac{0,0483}{4} \cdot 0,85}{18000} + 1\right)}{4 \log\left(1 + \frac{0,0483}{4} \cdot 0,85\right)} = 8,22 \text{ let}$$

Řešení v Excelu

$$18000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,0483}{4} \cdot 0,85\right)^{4n} - 1}{\frac{0,0483}{4} \cdot 0,85} = 700\,000$$

- Vyjdeme z rovnice
- Vytvoříme v prázdné buňce (B1) pomocnou funkci ve tvaru levé strany uvedené rovnice
- Neznámou n zadáme odkazem na prázdnou buňku (A1)
- Použijeme solver, Data – Analýza
hypotéz/Citlivostní analýza – Hledání řešení
- Do pole nastavená buňka zadáme odkaz na buňku s pomocnou fci (B1), do cílové hodnoty zadáme hledanou hodnotu pomocné fce pro hledané n , tj. 700000; do pole měněná buňka zadáme odkaz na prázdnou buňku pro n (A1)

Příklad 3

Kolik uspoří účastník stavebního spoření za 6 let, bude-li spořit koncem každého měsíce pravidelně 3000 CZK při úrokové sazbě 3,5 % p.a. (roční připisování)?

Státní podpora činí koncem každého roku 10 % z naspořené částky včetně úroků (za daný rok) a její výše nesmí překročit za rok 2000 CZK.

Řešení – podpora bez úroků

Naspořená částka bez podpory celkem

$$S = 3000 \cdot 12 \cdot \left(1 + \frac{11}{24} \cdot 0,035\right) \frac{(1 + 0,035)^6 - 1}{0,035} = 239588,19 \text{ Kč}$$

Podpora za rok $\min(0,1 \cdot 3000 \cdot 12; 2000) = 2000$

Celkově podpora v budoucí hodnotě

$$P = 2000 \cdot \frac{(1 + 0,035)^6 - 1}{0,035} = 13100,30 \text{ Kč}$$

Celkem

$$S + P = 252688,5 \text{ Kč}$$

Příklad 4

Nyní máme na účtu 155.000 Kč. Kolik musíme pravidelně na daný účet spořit, vždy koncem každého měsíce, abychom si za 7 let mohli z účtu vybrat 450.000 Kč, při úrokové sazbě 3 % p.a. platné v průběhu prvních čtyř let spoření a úrokové sazbě 4 % platné v průběhu posledních tří let spoření. Uvažujeme čtvrtletní připisování úroků a daň 15 %.

Řešení

Ze zadání plyne

$$\begin{aligned}
 450000 = & 155000 \cdot \left(1 + \frac{0,03}{4} \cdot 0,85\right)^{16} \left(1 + \frac{0,04}{4} \cdot 0,85\right)^{12} \\
 & + X \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{0,03}{4} \cdot 0,85\right) \frac{\left(1 + \frac{0,03}{4} \cdot 0,85\right)^{16} - 1}{\frac{0,03}{4} \cdot 0,85} \cdot \\
 & \cdot \left(1 + \frac{0,04}{4} \cdot 0,85\right)^{12} + X \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{0,04}{4} \cdot 0,85\right) \frac{\left(1 + \frac{0,04}{4} \cdot 0,85\right)^{12} - 1}{\frac{0,04}{4} \cdot 0,85}
 \end{aligned}$$

Odtud

$$X = 2775,35 \text{ Kč}$$

Příklad 5

Spoříme 10 let vždy koncem měsíce 1 500 Kč při 5 % p.a. a pololetním připisování úroků. Jaká bude naspořená částka, když banka strhává na konci každého roku poplatek ve výši 560 Kč a úroky jsou zdaněny srážkou u zdroje ve výši 15%?

Řešení

Zjistíme naspořenou částku bez poplatku (S). Odečteme pak souhrn hodnot poplatků aktualizovaných pomocí spoření (P) (poplatek roční třeba převést na pololetní!)

$$S = 1500 \cdot 6 \cdot \left(1 + \frac{5}{12} \cdot \frac{0,05}{2} \cdot 0,85\right) \frac{\left(1 + \frac{0,05}{2} \cdot 0,85\right)^{20} - 1}{\frac{0,05}{2} \cdot 0,85} = 223379,46 \text{ Kč}$$

$$P = \frac{560 \cdot \frac{0,05}{2} \cdot 0,85}{\left(1 + \frac{0,05}{2} \cdot 0,85\right)^2 - 1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,05}{2} \cdot 0,85\right)^{20} - 1}{\frac{0,05}{2} \cdot 0,85} = 6816,17 \text{ Kč}$$

$$S - P = 216563,29 \text{ Kč}$$

Příklad 6

Spoříme pravidelně vždy koncem měsíce na účet se čtvrtletním připisováním úroků. Po 5-ti letech máme naspořeno 500 000 Kč, na konci 5. roku u této částky vybereme 75 000 Kč a po 10-ti letech máme naspořeno 1 100 000 Kč. Jakou roční úrokovou sazbou je úročen daný účet? Jaká je velikost měsíční úložky?

Řešení

Ze zadání plyne soustava rovnic:

$$500000 = X \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{2}{6}i\right) \frac{(1+i)^{20} - 1}{i}$$

$$1100000 = X \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{2}{6}i\right) \frac{(1+i)^{20} - 1}{i} + 425000 \cdot (1+i)^{20}$$

Neboli, po dosazení y první rovnice do druhé

$$600000 = 425000 \cdot (1+i)^{20}$$

Odtud

$$i = \sqrt[20]{\frac{600000}{425000}} - 1 = 1,74 \% p.q. = 6,96 \% p.a.$$

Úložku dopočteme z první rovnice

$$X = \frac{500000}{3 \cdot \left(1 + \frac{2}{6} \cdot 0,0174\right) \frac{(1 + 0,0174)^{20} - 1}{0,0174}} = 6998,25 \text{ Kč}$$

Poplatky

- 1. poplatek je účtován častěji, než jsou připisovány úroky – celkem m poplatků za jedno úrokovací období
- - poplatek převedeme k ekvivalentu X pomocí krátkodobého spoření
- $$X = P \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m \pm 1}{2m} i\right)$$

Poplatky

- 2. poplatek je účtován méně často, než jsou připisovány úroky – celkem m připisování mezi 2 poplatky (př. roční poplatek, čtvrtletní úročení, $m = 4$)
- -ekvivalent X určíme jako úložku, kterou kdybychom spořili po daných m obdobích, tak dostaneme poplatek P

- $$P = X \cdot \frac{(1+i)^m - 1}{i}$$

- $$X = \frac{P \cdot i}{(1+i)^m - 1}$$

Poplatky

- 3. poplatek je účtován stejně často, jako jsou připisovány úroky
- - potom $X = P$
- Jak s X počítáme?
- U spoření poplatek snižuje výslednou naspořenou částku
- $$\left[A \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} i \right) - X \right] \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
- U důchodu poplatek zvyšuje částku potřebnou k výplatě dané annuity
- $$\left[A \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} i \right) + X \right] \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$