Výuková prezentace
1. část

6BMRE1

Matematické repetitorium

Lucie Váchová

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Výroky a logická algebra – stručný přehled témat

- Výroky
- Složené výroky
- Negace výroků
- Kvantifikované výroky

Výroky

- Výrok – tvrzení, o kterém má smysl rozhodovat, zda je či není pravdivé (přičemž nastane právě jedna z těchto dvou možností). Jsou to oznamovací věty (vyjádřené slovně nebo symbolicky); ale ne každá oznamovací věta je také výrokem.

- Která z uvedených sdělení jsou výroky?:
  - Co je dnes za den?
  - Součet libovolných dvou sudých čísel je sudé číslo.
  - Sázava je nejdelší řeka České republiky. Běžte domů!
  - Číslo x je menší nebo rovno 7.

Výroky

- Výrok – tvrzení, o kterém má smysl rozhodovat, zda je či není pravdivé (přičemž nastane právě jedna z těchto dvou možností). Jsou to oznamovací věty (vyjádřené slovně nebo symbolicky); ale ne každá oznamovací věta je také výrokem.

- Sdělení, která jsou výroky:
  - Součet libovolných dvou sudých čísel je sudé číslo. (pravdivý výrok)
  - Sázava je nejdelší řeka České republiky. (nepravdivý výrok)

- Sdělení, která nejsou výroky:
  - Běžte domů!
  - Co je dnes za den?
  - Číslo x je menší nebo rovno 7. (Je výroková forma – stane se výrokem po dosazení konstant za proměnné. Např. Číslo 5 je menší nebo rovno 7 – už je výrok.)

Složené výroky

- Příklady složených výroků:
  - Jestliže budu mít v zimě dovolenou, pak pojedu na hory.
  - V zimě pojedu na hory nebo v létě pojedu k moři.

- Složený výrok – výrok, který vznikne spojením jiných výroků pomocí logických spojek.

- Logické spojky:
  - Konjunkce, Disjunkce, Implikace, Ekvivalence
  - Negace (tvoří složený výrok z jednoho výroku)

Pravdivostní ohodnocení

- Pravdivostní ohodnocení říká, zda je výrok pravdivý či nepravdivý.
- Číselné vyjádření – 1 (pravda), 0 (nepravda).

- Vyjádření pravdivostního ohodnocení pravdivostní tabulkou – využití zejména u složitějších výroků.

- Tautologie – výrok, který je vždy pravdivý (pro jakékoli ohodnocení výrokových proměnných daného výroku).

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Konjunkce – „a“, „a současně“

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- Příklad:
  - Číslo 6 je sudé a zároveň je číslo 6 dělitelné 2. (Výrok je pravdivý, protože oba dílčí výroky jsou pravdivé.)

- Aby byla konjunkce pravdivá, musí být pravdivé oba spojované výroky.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Disjunkce – „nebo“ (nevylučovací)

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- Příklad:
  - Číslo 6 je liché nebo je číslo 6 dělitelné 2. (Výrok je pravdivý, protože stačí, že druhý z dílčích výroků je pravdivý.)

- Aby byla disjunkce pravdivá, musí být pravdivý alespoň jeden ze spojovaných výroků.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Implikace – „jestliže…pak“, „z toho plyne“

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- Příklad:
  - Jestliže je číslo 12 dělitelné 6, pak je dělitelné 3. (Výrok je pravdivý, protože oba dílčí výroky jsou pravdivé. Záleží na pořadí výroků!)

- Aby byla implikace pravdivá, musí být pravdivé oba spojované výroky nebo musí být první výrok nepravdivý.

Ekvivalence – „právě tehdy, když“, „právě když“

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- Příklad:
  - Trojúhelník má všechny strany stejně dlouhé právě tehdy, když je rovnostranný. (Výrok je pravdivý.)

- Aby byla ekvivalence pravdivá, musí být oba spojované výroky pravdivé nebo musí být oba spojované výroky nepravdivé.

Negace – „není pravda, že“

A	$\neg A$
1	0
0	1

- Příklad:
  - Výrok: Číslo -5 je přirozené číslo.
  - Negace výroku: Není pravda, že číslo -5 je přirozené číslo.

- Negace popírá určitý výrok. Negací výroku je výrok, který má opačnou pravdivostní hodnotu než původní výrok.

Určení pravdivostní hodnoty složeného výroku

- Chceme-li určit hodnotu složeného výroku, nepotřebujeme znát obsah (čili význam) jeho dílčích výroků, ale potřebujeme znát jejich logický význam (čili pravdivostní hodnotu).

- Pravdivostní hodnota složeného výroku závisí výhradně na pravdivostních hodnotách jeho dílčích výroků a na použitých logických spojkách.

- Chceme-li rozhodnout, kdy je složený výrok pravdivý, musíme postupně prozkoumat všechny logické spojky, pomocí kterých byl daný výrok vytvořen.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Určení pravdivostní hodnoty složeného výroku - příklad

- Rozhodněte, zda $\boldsymbol{A} \Rightarrow (\neg \boldsymbol{A} \Rightarrow \neg \boldsymbol{B})$ je tautologie.

Rozhodněte, zda $\mathbf{A} \Rightarrow (\neg \boldsymbol{A} \Rightarrow \neg \boldsymbol{B})$ je tautologie

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\mathbf{A}\Rightarrow(\neg\boldsymbol{A}\Rightarrow\neg\boldsymbol{B})$
1	1	?
1	0	?
0	1	?
0	0	?

Chceme-li rozhodnout, kdy je složený výrok pravdivý, musíme postupně prozkoumat všechny logické spojky, pomocí kterých byl daný výrok vytvořen.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Rozhodněte, zda $\boldsymbol{A} \Rightarrow (\neg \boldsymbol{A} \Rightarrow \neg \boldsymbol{B})$ je tautologie

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}$	$\neg\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}\Rightarrow\neg\boldsymbol{B}$	$\mathbf{A}\Rightarrow(\neg\boldsymbol{A}\Rightarrow\neg\boldsymbol{B})$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Chceme-li rozhodnout, kdy je složený výrok pravdivý, musíme postupně prozkoumat všechny logické spojky, pomocí kterých byl daný výrok vytvořen.

Rozhodněte, zda $\boldsymbol{A} \Rightarrow (\neg \boldsymbol{A} \Rightarrow \neg \boldsymbol{B})$ je tautologie

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}$	$\neg\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}\Rightarrow\neg\boldsymbol{B}$	$\mathbf{A}\Rightarrow(\neg\boldsymbol{A}\Rightarrow\neg\boldsymbol{B})$
1	1	0			
1	0	0			
0	1	1			
0	0	1			

Rozhodněte, zda $\boldsymbol{A} \Rightarrow (\neg \boldsymbol{A} \Rightarrow \neg \boldsymbol{B})$ je tautologie

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}$	$\neg\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}\Rightarrow\neg\boldsymbol{B}$	$\mathbf{A}\Rightarrow(\neg\boldsymbol{A}\Rightarrow\neg\boldsymbol{B})$
1	1	0	0		
1	0	0	1		
0	1	1	0		
0	0	1	1		

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Rozhodněte, zda $\mathbf{A} \Rightarrow (\neg \boldsymbol{A} \Rightarrow \neg \boldsymbol{B})$ je tautologie

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}$	$\neg\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}\Rightarrow\neg\boldsymbol{B}$	$\mathbf{A}\Rightarrow(\neg\boldsymbol{A}\Rightarrow\neg\boldsymbol{B})$
1	1	0	0	1	
1	0	0	1	1	
0	1	1	0	0	
0	0	1	1	1	

Rozhodněte, zda $\mathbf{A} \Rightarrow (\neg \boldsymbol{A} \Rightarrow \neg \boldsymbol{B})$ je tautologie

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}$	$\neg\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}\Rightarrow\neg\boldsymbol{B}$	$\mathbf{A}\Rightarrow(\neg\boldsymbol{A}\Rightarrow\neg\boldsymbol{B})$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

Je to tautologie.

Pokud máme A, B, C

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Kvantifikované výroky

- Kvantifikovaný výrok – obsahuje údaje o množství objektů, pro které platí určitá podmínka.

- Kvantifikátory:
  - Obecný (velký)
    - „pro každé…“, „pro všechny prvky souboru platí…“
  - Existenční (malý)
    - „někteří…“, „existuje alespoň jeden prvek souboru, pro který platí…“

$\forall x \in M: P(x) \; - pro\ všechna\ x\ z\ množiny\ M\ platí\ podmínka\ P(x)$

$\exists x \in M: P(x) \; - existuje\ x\ z\ množiny\ M, pro\ které\ platí\ podmínka\ P(x)$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Negace kvantifikovaných výroků

- Obecný kvantifikátor nahradíme existenčním a negujeme podmínku P(x)
- Existenční kvantifikátor nahradíme obecným a negujeme podmínku P(x)

- Příklady:
  - Někteří zaměstnanci mají všechny víkendy volné.
  - Negace: ?

  - Na každé paletě se našla krabice, která obsahovala jen bezvadné výrobky.
  - Negace: ?

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Negace kvantifikovaných výroků – řešení příkladů

- Obecný kvantifikátor nahradíme existenčním a negujeme podmínku P(x)
- Existenční kvantifikátor nahradíme obecným a negujeme podmínku P(x)

- Příklady:
  - Někteří zaměstnanci mají všechny víkendy volné.
  - Negace: Žádný zaměstnanec nemá všechny víkendy volné. (Všichni zaměstnanci mají některý víkend, který nemají volný)

  - Na každé paletě se našla krabice, která obsahovala jen bezvadné výrobky.
  - Negace: Na některé paletě obsahovaly všechny krabice alespoň jeden vadný výrobek.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Množiny a operace s nimi – stručný přehled témat

- Množiny
- Operace s množinami
- Vennovy diagramy

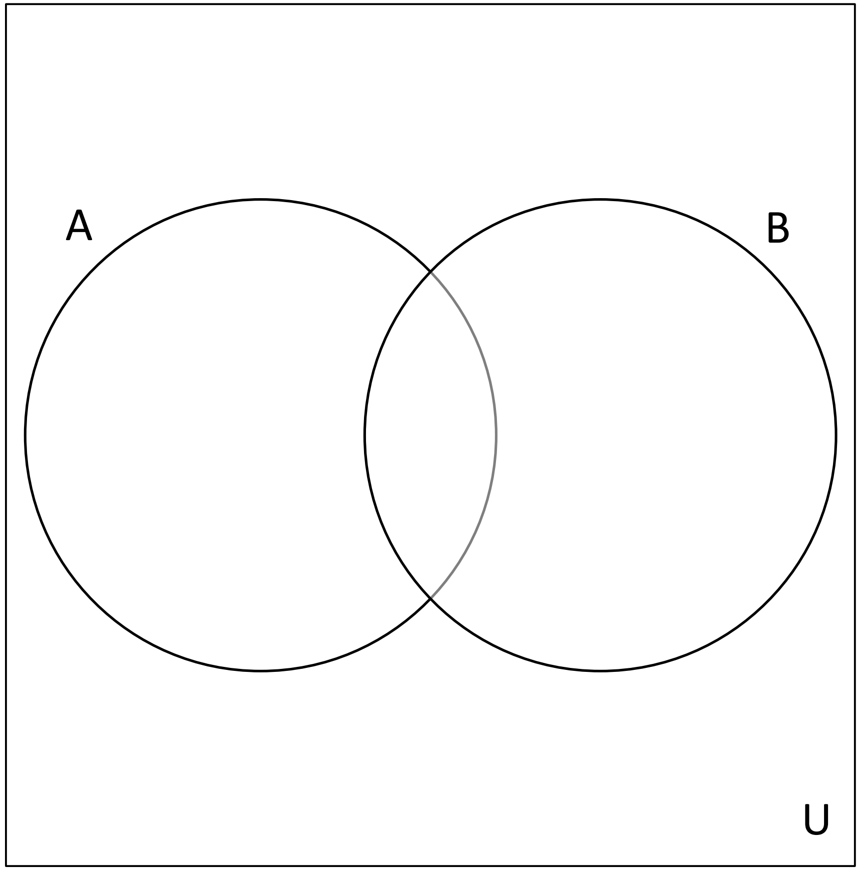
Množiny

- Množina – soubor prvků
- Objekt x je prvkem množiny M ($x \in M$); objekt y není prvkem množiny M (y $\notin M$)
- Prázdná množina – neobsahuje žádný prvek
- Zápis množin:
  - Výčtem prvků
  - Pomocí charakteristické vlastnosti
- Inkluze množin A, B – množina A je podmnožinou množiny B, právě tehdy, když každý prvek množiny A je prvkem množiny B ($A \subseteq B$) – neostrá inkluze připouští rovnost množin
- Pokud $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$, pak $A = B$ (identické množiny)
- Pokud $A \subseteq B$ a zároveň $A \neq B$, pak A je vlastní podmnožinou B ($A \subset B$)

Další vztahy a operace s množinami

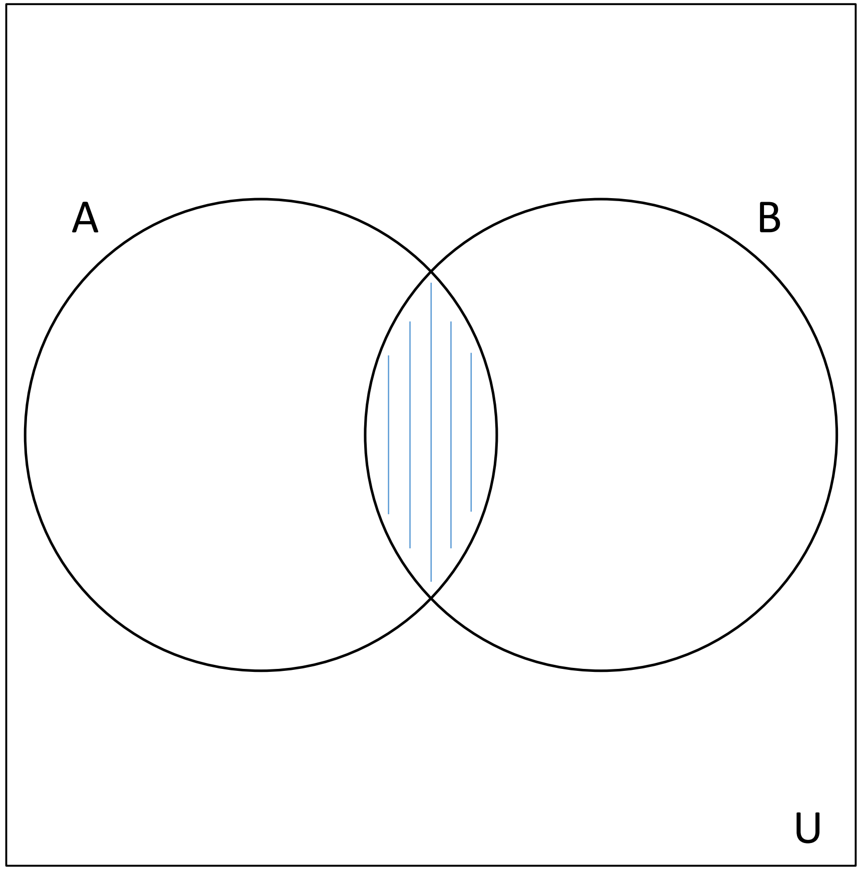
- Doplněk množiny – je-li množina A podmnožinou B, pak doplněk A do B je množina, která obsahuje všechny prvky z B, které zároveň nejsou v A $\left(A_B^{\prime}\right)$.
- Sjednocení množin A a B – je množina C těch prvků, které patří alespoň do jedné z množin A, B $(C = A \cup B)$.
- Průnik množin A a B – je množina C těch prvků, které patří zároveň do obou množin A a B $(C = A \cap B)$.
- Rozdíl množin A a B – je množina C těch prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B $(C = A\backslash\mathrm{B})$.

Vennovy diagramy



U – základní množina

Vennovy diagramy – znázornění průniku A a B



$$A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}$$

Vennovy diagramy - příklad

Ve skupině je 26 lidí. Z toho francouzsky umí 13 lidí, španělsky 6, přičemž 3 umí francouzsky i španělsky. Z toho vyplývá, že ani francouzsky ani španělsky nemluví:

a) 10

b) 4

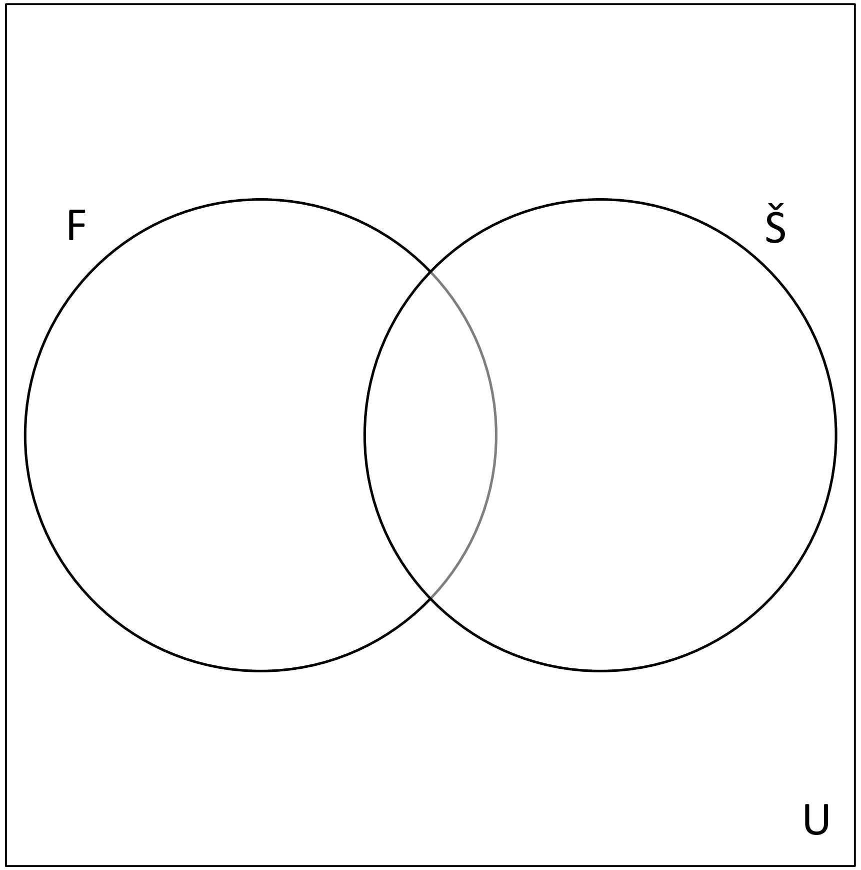
c) 7

d) 11

e) žádná z předcházejících odpovědí není správná

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

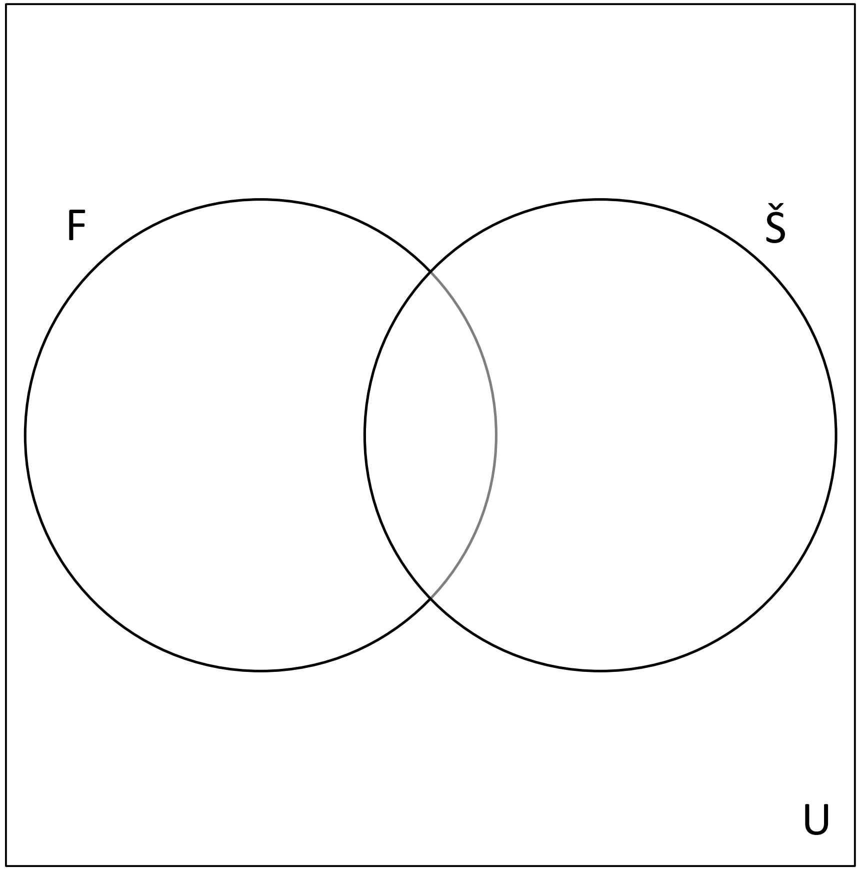
Vennovy diagramy – řešení příkladu



U – základní množina?

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

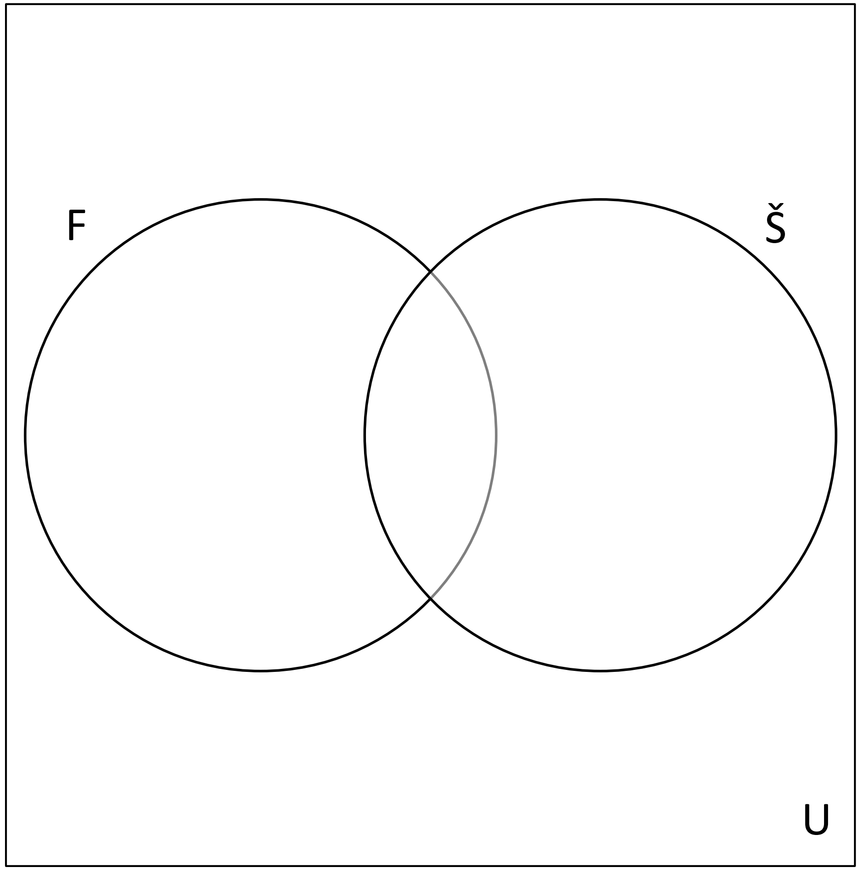
Vennovy diagramy – řešení příkladu



U – základní množina: celkový počet lidí ve skupině

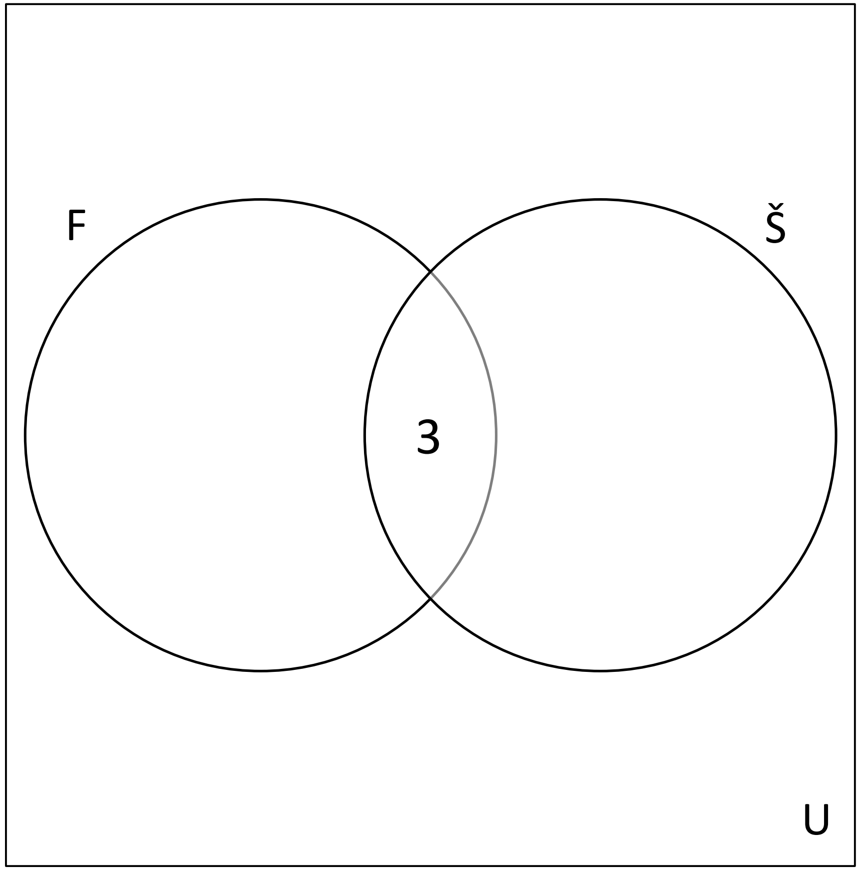
26

Vennovy diagramy – řešení příkladu



Francouzsky i španělsky umí 3 lidé – jak vyjádříme v rámci diagramu?

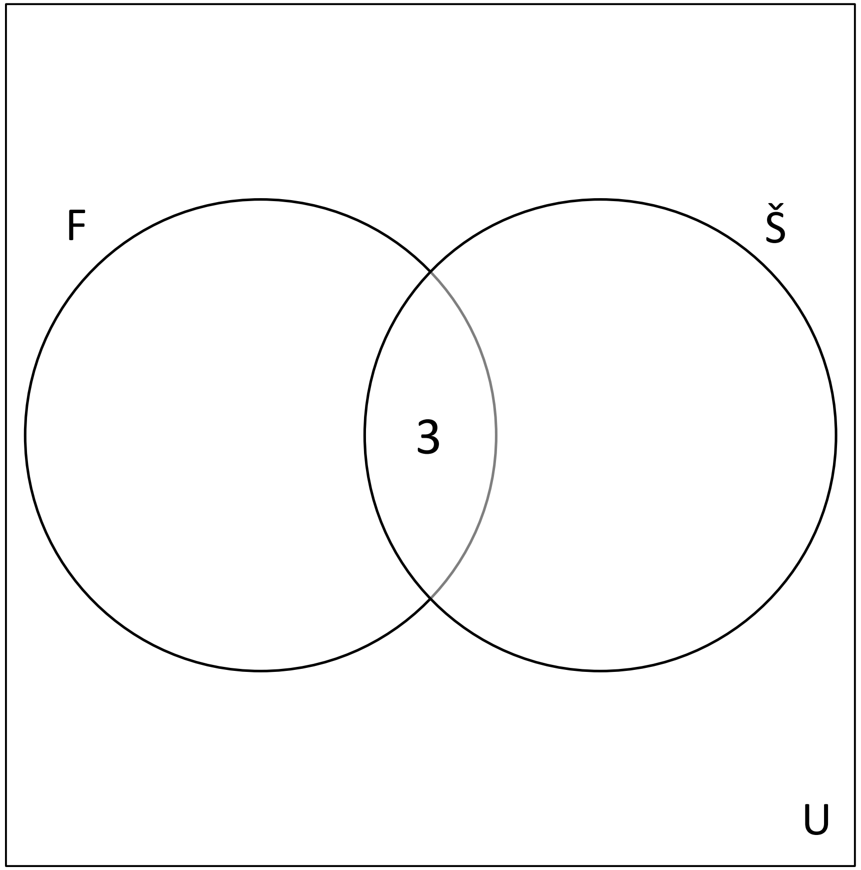
Vennovy diagramy – řešení příkladu



Francouzsky i španělsky umí 3 lidé – jak vyjádříme v rámci diagramu?

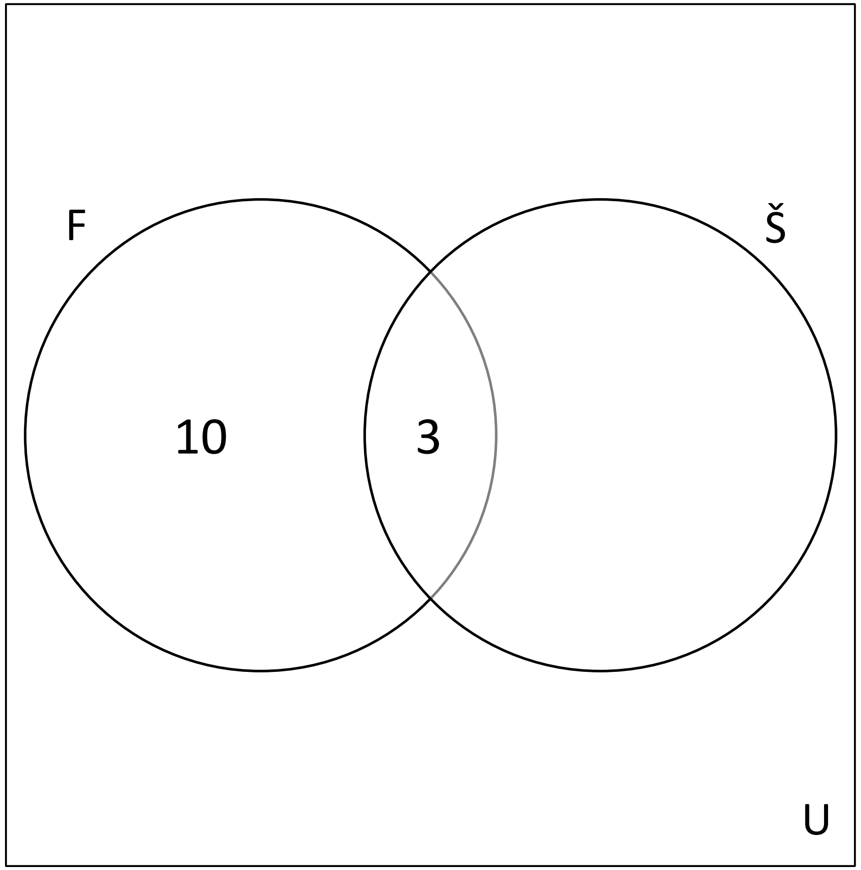
Průnik F a Š

Vennovy diagramy – řešení příkladu



Francouzsky umí 13 lidí – jak vyjádříme v rámci diagramu?

Vennovy diagramy – řešení příkladu

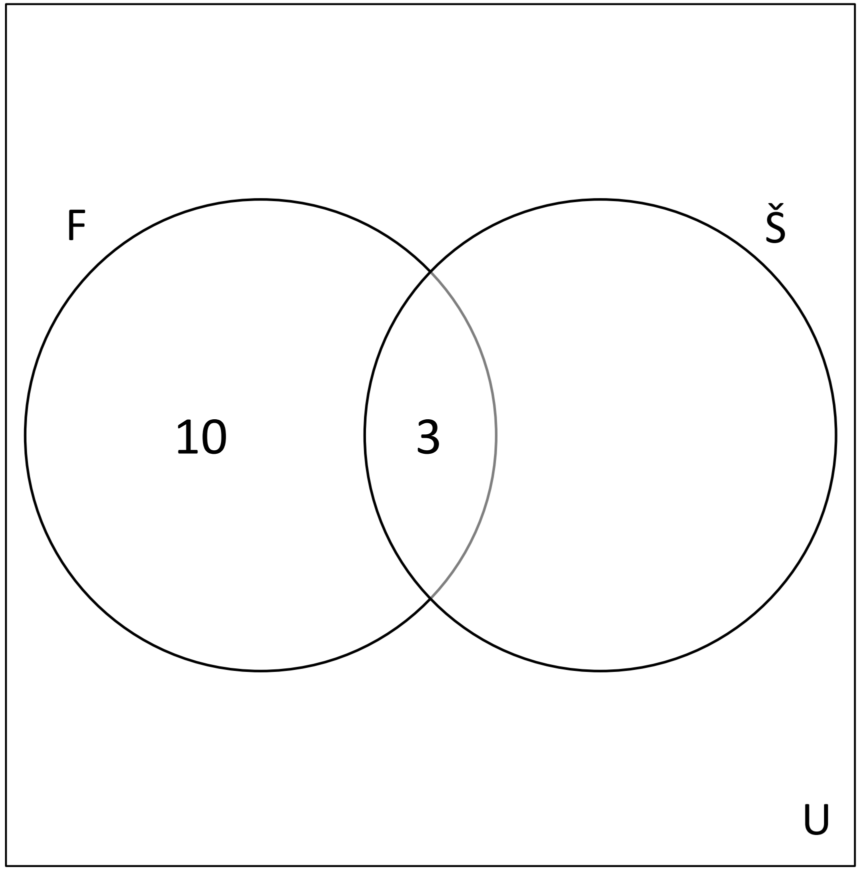


Francouzsky umí 13 lidí – jak vyjádříme v rámci diagramu?

13 – 3 =10

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

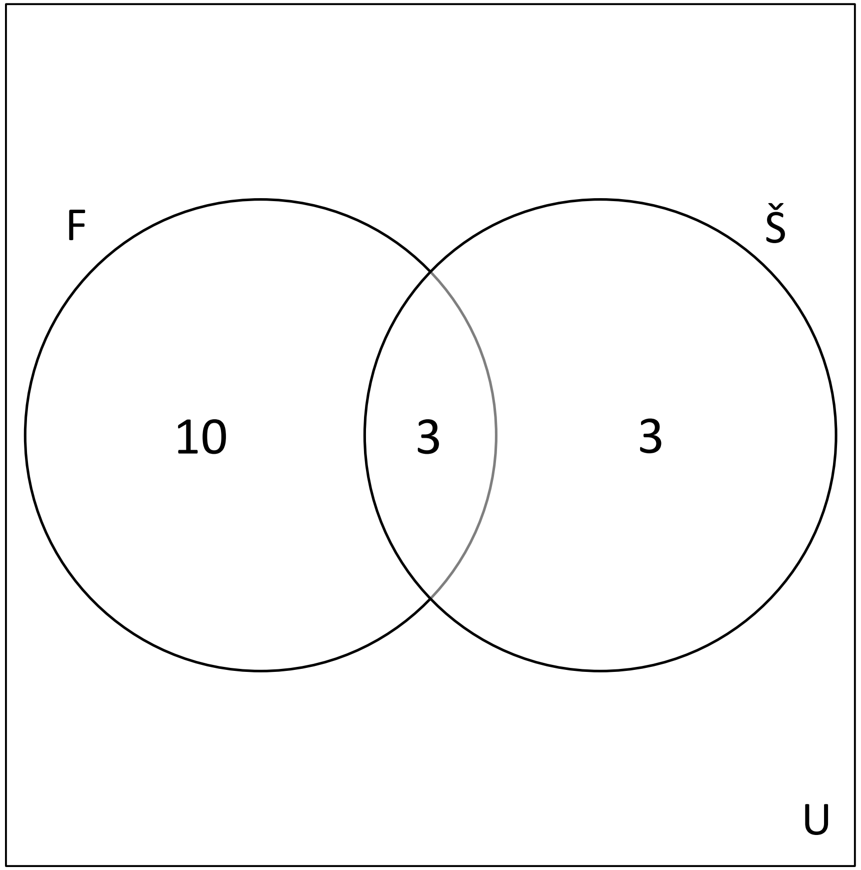
Vennovy diagramy – řešení příkladu



Španělsky umí 6 lidí – jak vyjádříme v rámci diagramu?

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Vennovy diagramy – řešení příkladu

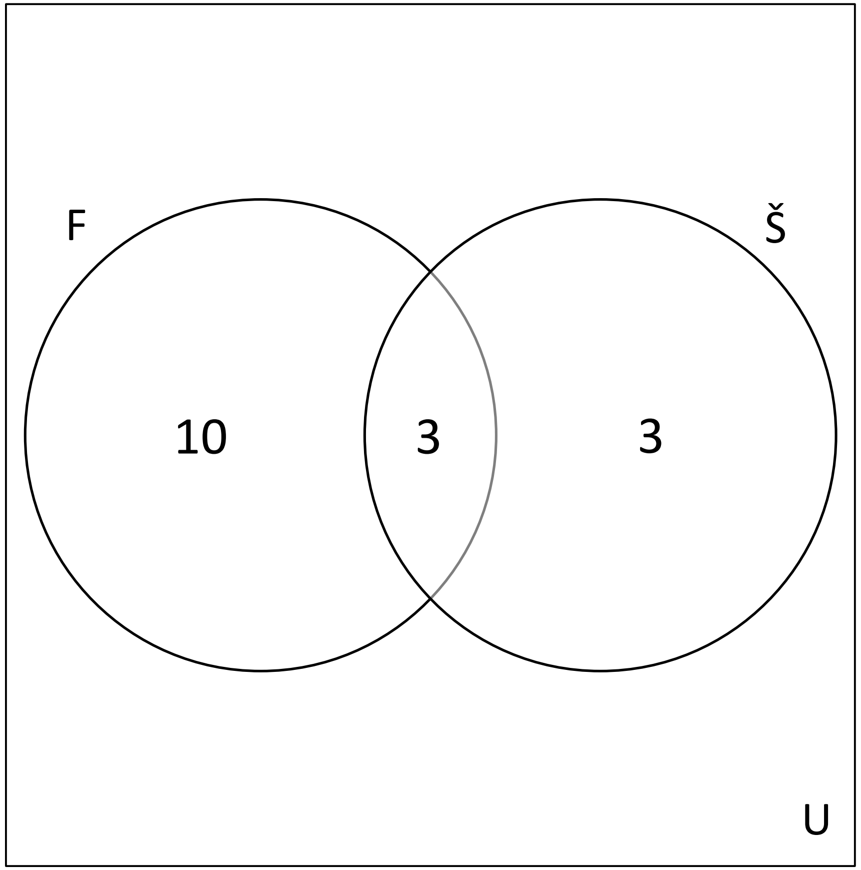


Španělsky umí 6 lidí – jak vyjádříme v rámci diagramu?

6 – 3 = 3

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

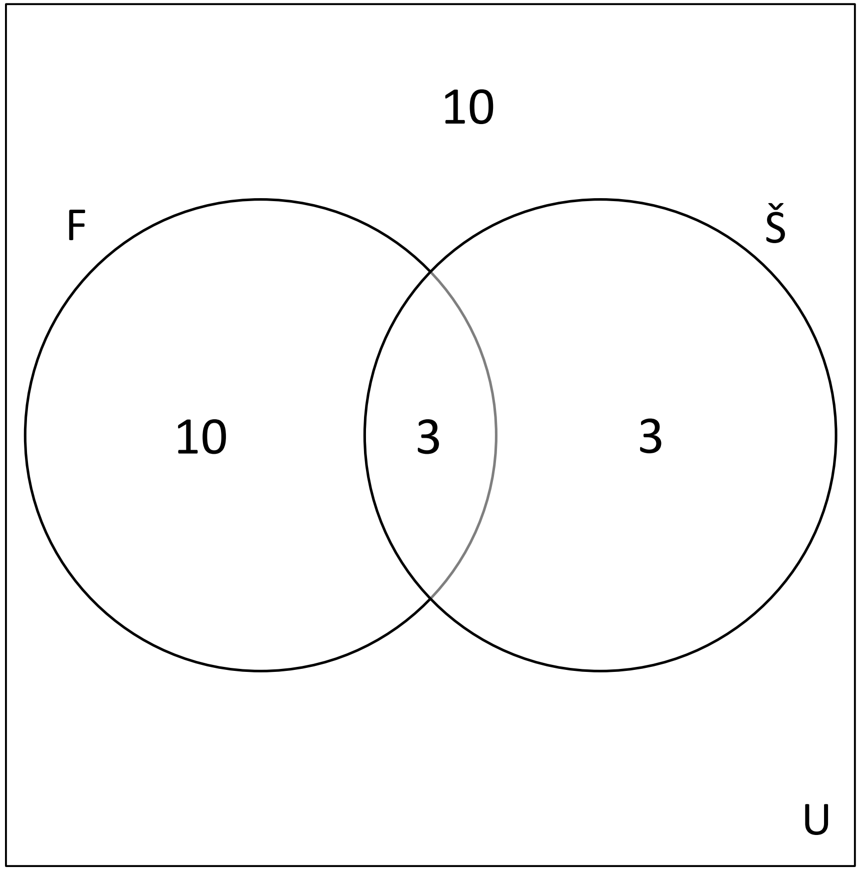
Vennovy diagramy – řešení příkladu



Kolik lidí ze skupiny neumí francouzsky ani španělsky? – jak vyjádříme v rámci diagramu?

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

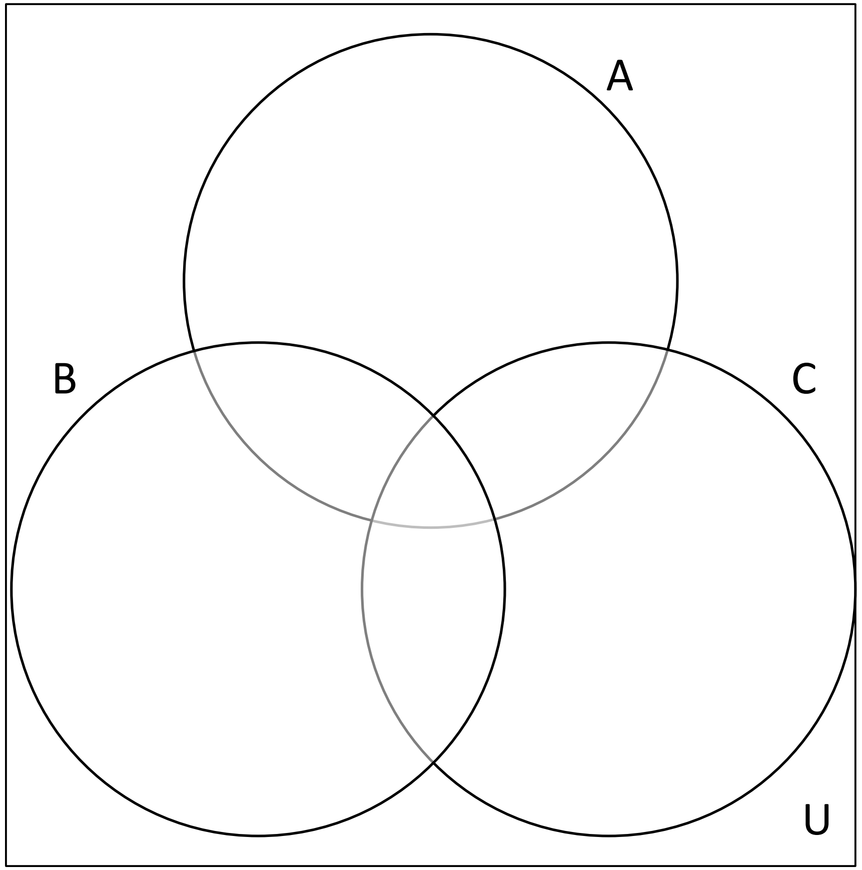
Vennovy diagramy – řešení příkladu



Kolik lidí ze skupiny neumí francouzsky ani španělsky? – jak vyjádříme v rámci diagramu?

$$26 - (3 + 10 + 3) = 10$$

Vennovy diagramy – více množin



- POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. Dotisk 7. vyd. Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-196-5.