EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Cvičné příklady – 2. soustředění

Soubor cvičných příkladů

6BMMA1

Matematika pro manažery

Lucie Váchová

2018

Rozvoj vzdělávací a dalších činností a podpora kvality na VŠE v Praze, r. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002342

1 Vektorový a maticový počet

1.1 Řešené příklady

Příklad 1

Určete hodnotu t tak, aby vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ byly navzájem kolmé.

a) $\vec{u}(t,4,-1)$ a $\vec{v}(1,-t,13)$
b) $\vec{u}(7,7,2t)$ a $\vec{v}(t,t,-7)$
c) $\vec{u}(1,2-t,6)$ a $\vec{v}(-t,5,1+t)$

Řešení

Vektory jsou kolmé, pokud skalární součin je roven 0.

a) Řešíme rovnici
$t-4t-13=0$
$-3t=13$
$t=-\frac{13}{3}$

b) Řešíme rovnici
$7t+7t-14t=0$
$0=0$
Nekonečně mnoho řešení pro $t\in R$.

c) Řešíme rovnici
$-t+5(2-t)+6(1+t)=0$
$-t+10-5t+6+6t=0$
$16\neq 0$
Nemá řešení.

Příklad 2

Vypočítejte součiny $C=A\cdot B$ a $D=B\cdot A$, jestliže

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\0&4\\4&7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}$$

Řešení

Součin matic je definovaný, pokud počet sloupců v první matici je stejný jako počet řádků ve druhé matici. Součin má tolik řádků jako první matice, a tolik sloupců jako druhá matice.

$$C=\begin{pmatrix}3&1\\0&4\\4&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(3,1)(-1,1)&(3,1)(0,2)\\(0,4)(-1,1)&(0,4)(0,2)\\(4,7)(-1,1)&(4,7)(0,2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+1&0+2\\0+4&0+8\\-4+7&0+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\4&8\\3&14\end{pmatrix}$$

$D = B \cdot A$ není definován

Příklad 3

Nalezněte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

Řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 10 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Od druhého řádku odečteme šestinásobek prvního řádku. Zároveň od třetího řádku odečteme třináctinásobek prvního řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -13 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Od třetího řádku odečteme trojnásobek druhého řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

K prvnímu řádku přičteme druhý řádek. A druhý řádek vynásobíme -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

K prvnímu řádku přičteme třetí řádek. Zároveň od druhého řádku odečteme dvojnásobek třetího řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Vlevo máme jednotkovou matici. Našli jsme inverzní matici k matici A v podobě

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Další příklady k procvičení

1.2.1 Zadání

Příklad 1

Vypočtěte součiny $C = A \cdot B$ a $D = B \cdot A$, jestliže:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 2

Nalezněte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

1.2.2 Výsledky

Příklad 1

C není definován

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 8 \\ 8 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 2

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -13 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

2 Řešení soustav lineárních rovnic

2.1 Řešené příklady

Příklad 1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic:

a) $a - 2b + c = 0$
$2a - 3b + 2c = 1$
$5a - 9b + 5c = 1$

b) $2a + 3b - 4c = 4$
$a + 4b + c = 1$
$-3a - 22b + 2c = 1$

c) $a + b - 3c = 3$
$3a + 3b + 4c = 6$
$4a + 4b + 7c = 5$

Řešení

a) Zadání napíšeme ve tvaru rozšířené matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -9 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

První řádek nijak neměníme. Od druhého řádku odečteme dvojnásobek řádku prvního.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -9 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Dále od třetího řádku odečteme pětinásobek prvního řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dostali jsme situaci, kdy dva řádky jsou shodné. Odečteme je od sebe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vidíme, že soustava má nekonečně mnoho řešení - hodnost matice soustavy $(h = 2)$ je shodná s hodností rozšířené matice soustavy $(h_r = 2)$, a je nižší než počet neznámých $(n = 3)$. Volíme jednu $(n - h)$ neznámou jako parametr.

Z druhého řádku matice dostáváme $b = 1$. V prvním řádku máme $a - 2b + c = 0$. Po dosazení $b = 1$ dostáváme $a - 2 + c = 0$, a tedy $a = 2 - c$.

Zvolíme $c = t, t \in R$. Tím dostáváme nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$a = 2 - t$, $b = 1$, $c = t$, kde t je libovolné reálné číslo.

b) Zadání napíšeme ve tvaru rozšířené matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ -3 & -22 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Prohodíme první a druhý řádek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ -3 & -22 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Od druhého řádku odečteme dvojnásobek prvního řádku

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -6 & 2 \\ -3 & -22 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Ke třetímu řádku přičteme trojnásobek prvního řádku

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -6 & 2 \\ 0 & -10 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

Od třetího řádku odečteme dvojnásobek druhého řádku

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \end{array}\right)$$

Vidíme, že soustava má právě jedno řešení, protože $h = h_r = n = 3$.

Ze třetího řádku dostáváme $17c = 0$ a tedy $c = 0$. Ve druhém řádku máme rovnici $-5b - 6c = 2$. Po dosazení $c = 0$ dostáváme $-5b - 0 = 2$, tedy $b = -\frac{2}{5}$. V prvním řádku máme $a + 4b + c = 1$. Z toho $a = 1 - 4b - c$. Dosadíme $b = -\frac{2}{5}$ a $c = 0$ a dopočítáme $a = 1 - 4\left(-\frac{2}{5}\right) - 0 = \frac{13}{5}$.

Našli jsme tedy řešení ve tvaru $a = \frac{13}{5}$, $b = -\frac{2}{5}$, $c = 0$.

c) Zadání napíšeme ve tvaru rozšířené matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{array}\right)$$

Od druhého řádku odečteme trojnásobek prvního řádku

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & -3 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{array}\right)$$

Od třetího řádku odečteme čtyřnásobek prvního řádku

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 19 & -7 \end{array}\right)$$

Třetí řádek násobíme třinácti, a odečteme od něj druhý řádek násobený devatenácti

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -34 \end{array}\right)$$

Vidíme, že soustava nemá řešení, protože $h < h_r$.

Příklad 2

Firma vyrábí tři druhy výrobků. Jeden kus výrobku prvního druhu se prodává za 25 Kč, druhého za 8 Kč a třetího za 18 Kč. Náklady na výrobu jednoho kusu výrobku prvního druhu jsou 10 Kč, druhého druhu 3 Kč a třetího druhu 7 Kč. V daném období byly zaznamenány příjmy z prodeje těchto výrobků v celkové výši 1 572 000 Kč, náklady na výrobu prodaného počtu výrobků pak 615 000 Kč. Přičemž celkem se prodalo 99 000 kusů výrobků. Pomocí Gaussovy eliminační metody určete, kolik kusů jednotlivých druhů výrobků firma prodala.

Řešení

Definujeme si jednotlivé neznámé

x…počet prodaných kusů prvního výrobku

y…počet prodaných kusů druhého výrobku

z…počet prodaných kusů třetího výrobku

Pro počet vyrobených kusů máme rovnici: $x + y + z = 99000$

Pro příjmy platí: $25x + 8y + 18z = 1572000$

Pro náklady platí: $10x + 3y + 7z = 615000$

Z této soustavy lineárních rovnic sestavíme rozšířenou matici soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 99000 \\ 25 & 8 & 18 & 1572000 \\ 10 & 3 & 7 & 615000 \end{array}\right)$$

První řádek nijak neměníme. Od druhého řádku odečteme první řádek násobený dvacetipěti.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 99000 \\ 0 & -17 & -7 & -903000 \\ 10 & 3 & 7 & 615000 \end{array}\right)$$

Od třetího řádku odečteme desetinásobek řádku prvního.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 99000 \\ 0 & -17 & -7 & -903000 \\ 0 & -7 & -3 & -375000 \end{array}\right)$$

Třetí řádek násobíme sedmnácti a přičteme k němu druhý řádek násobený mínus sedmi.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 99000 \\ 0 & -17 & -7 & -903000 \\ 0 & 0 & 2 & 54000 \end{array}\right)$$

Vidíme, že soustava má právě jedno řešení.

Ze třetího řádku dostáváme

$2z = 54000$

$z = 27000$

Druhý řádek představuje rovnici

$-17y - 7z = -903000$

Z té můžeme vypočítat y jako

$y = \frac{-903000+7z}{-17}$

$y = \frac{-903000+7\cdot 27000}{-17} = 42000$

Z prvního řádku matice dostáváme

$x + y + z = 99000$

$x = 99000 - y - z$

$x = 99000 - 42000 - 27000 = 30000$

Zjistili jsme, že firma prodala 30 000 kusů prvního výrobku, 42 000 kusů druhého výrobku a 27 000 kusů třetího výrobku.

2.2 Další příklady k procvičení

2.2.1 Zadání

Příklad 1

Vyřešte soustavu lineárních rovnic Gaussovou metodou:

a) $x_1 + x_2 - x_3 = 1$
$x_1 - x_2 + x_3 = -1$
$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$

b) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$
$4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3$

Příklad 2

Proveďte diskuzi počtu řešení soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametrech α a β:

$x + 2y + 3z = 0$

$x + y - 2z = 0$

$2x + 3y + \alpha z = \beta$

2.2.2 Výsledky

Příklad 1

a) Řešením soustavy je vektor $\vec{x}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
b) Soustava nemá řešení

Příklad 2

Soustava má nekonečně mnoho řešení pro $\alpha = 1 \wedge \beta = 0$.

Soustava má právě jedno řešení pro $\alpha \neq 1 \wedge \beta \in R$.

Soustava nemá řešení pro $\alpha = 1 \wedge \beta \neq 0$.

3 Aplikace lineární algebry a geometrie

3.1 Řešené příklady

Příklad 1

Vyřešte graficky následující úlohu: Uvažujte výrobu dvou druhů výrobků – alfa a beta. X označuje množství vyrobených výrobků alfa a Y označuje množství vyrobených výrobků beta (obě množství jsou vyjádřena v kilogramech, přičemž se nemusí vyrábět vždy celé kilogramy – je tedy možné vyrábět například i hodnoty 0,75 kg, 3,6 kg, apod.). Jestliže víte, že funkce zisku je $Z = 3X + 2Y$, rozhodněte, při jakých hodnotách X a Y bude dosaženo maximálního zisku s ohledem na následující výrobní omezení:

$4X + 3Y \geq 6$

$2X + Y \leq 4$

$Y \leq 3$

$X \geq 0$

$Y \geq 0$

Řešení

Nejprve si vymezíme prostor přípustných řešení – tedy takových řešení, která nám splňují uvedené podmínky. Začneme tím, že si načrtneme křivky

$4X + 3Y = 6$ (přímka, která prochází například body $[0; 2]$, $[1{,}5; 0]$)

$2X + Y = 4$ (přímka, která prochází například body $[0; 4]$, $[2; 0]$)

$Y = 3$

$X = 0$

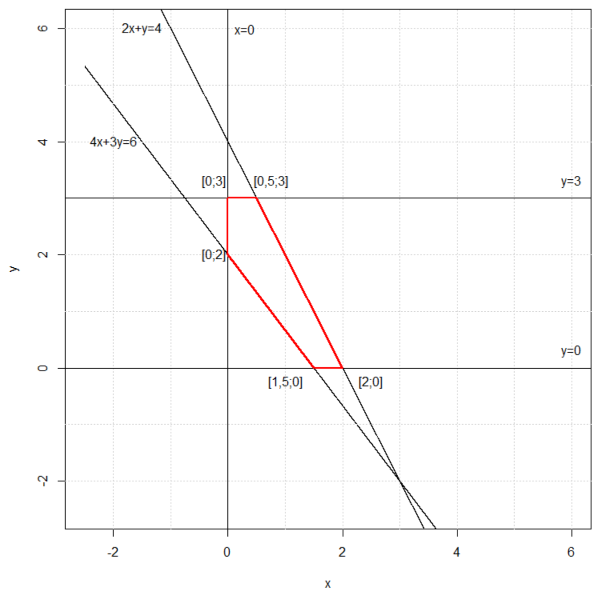
$Y = 0$

Po dosazení určíme, která polorovina nám u které nerovnice splňuje uvedenou nerovnost. Tím dostaneme prostor přípustných řešení, který je na obrázku ohraničen červenou barvou (v tomto prostoru jsou splněna všechna omezení).

Po dosazení průsečíků výše uvedených křivek do funkce zisku $Z = 3X + 2Y$ zjistíme, která kombinace množství vyrobených výrobků alfa a beta přináší nejvyšší zisk.

Souřadnice bodu	Zisk
$[1{,}5; 0]$	4,5
$[2; 0]$	6
$[0; 2]$	4
$[0; 3]$	6
$[0{,}5; 3]$	7,5

Z tabulky vidíme, že nejvyšší zisk přináší výroba 0,5kg výrobku alfa a 3kg výrobky beta.



3.2 Další příklady k procvičení

3.2.1 Zadání

Příklad 1

Firma vyrábí dva druhy výrobků (Gama a Delta) a za jeden den je schopna vyrobit celkem maximálně 24 kusů. Vzhledem k již uskutečněným objednávkám je nutné, aby firma vyrobila denně alespoň 6 výrobků Gama. Ve firmě prochází oba druhy výrobků kontrolou a následným balením, přičemž obě tyto operace dohromady trvají u výrobku Gama jednu hodinu, u výrobku Delta půl hodiny, a pracovník provádějící kontrolu je k dispozici 16 hodin denně. Jestliže je firma schopna prodat jeden kus výrobku Gama za 1500Kč a jeden kus výrobku Delta za 2000 Kč, kolik kusů jednotlivých druhů výrobků by měla firma denně vyrobit, pokud chce maximalizovat denní zisk? Vyřešte také graficky.

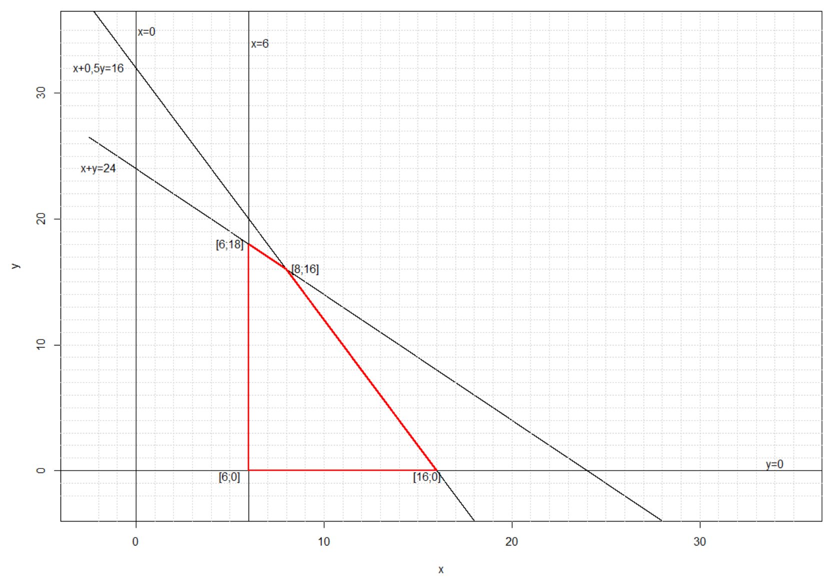
3.2.2 Výsledky

Příklad 1

x…počet ks výrobků Gama $(x = 6)$

y…počet ks výrobků Delta $(y = 18)$

zisk $Z = 45000\ (Kč)$


x=0
x=6
x+0,5y=16
x+y=24
[6;18]
[8;16]
[6;0]
[16;0]
y=0
y
x
0
10
20
30