EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Cvičné příklady – 4. soustředění

Soubor cvičných příkladů

6BMRE1

Matematické repetitorium

Lucie Váchová

2018

Rozvoj vzdělávací a dalších činností a podpora kvality na VŠE v Praze, r. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002342

1 Základy kombinatoriky a pravděpodobnosti

1.1 Řešené příklady

Příklad 1

Jestliže se zvětší počet prvků o dva, zvětší se počet tříčlenných variací o 150. Určete, jaký byl původní počet prvků.

Řešení

$V(3, n) + 150 = V(3, n + 2)$

$n(n-1)(n-2) + 150 = (n+2)(n+1)n$

$n^3 - 3n^2 + 2n + 150 = n^3 + 3n^2 + 2n$

$6n^2 = 150$

$n_{1,2} = \pm 5$

Původní počet prvků je 5.

Příklad 2

Jestliže se počet prvků zvětší o dva, počet permutací se zvětší 56krát. Určete, jaký byl původní počet prvků.

Řešení

$(n+2)! = 56n!$

$(n+2)(n+1)n! = 56n!$

$(n+2)(n+1) = 56$

$\mathrm{n}^2 + 3\mathrm{n} + 2 = 56$

$\mathrm{n}^2 + 3\mathrm{n} - 54 = 0$

$\mathrm{n}_1 = 6$

$\mathrm{n}_2 = -9$

Původní počet prvků je 6.

1.2 Další příklady k procvičení

1.2.1 Zadání

Příklad 1

Jestliže $a = \frac{20!}{6840}$, $b = 17!$. Pak

a) $a > b$ b) $a = b$ c) $a < b$

d) $3a < b$ e) žádná z předcházejících odpovědí není správná

Příklad 2

Na koncertě se má hrát 8 skladeb. Počet všech možných pořadí, ve kterém se mohou hrát je

a) 75 b) 2320 c) 5040 d) 1320 e) žádná z předcházejících odpovědí není správná

Příklad 3

$\binom{12}{8} =$

a) 495 b) 364 c) 96 d) 320 e) žádná z předcházejících odpovědí není správná

Příklad 4

Hodíme současně šesti hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padnou samá lichá čísla?

1.2.2 Výsledky

Příklad 1

b

Příklad 2

e

Příklad 3

a

Příklad 4

$\frac{1}{64}$

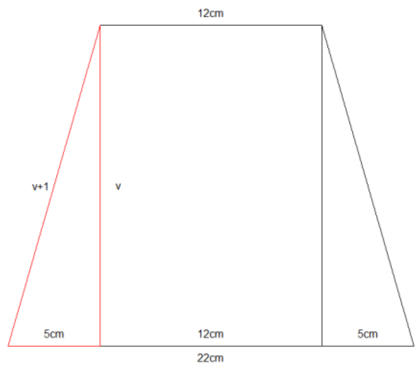
2 Planimetrie

2.1 Řešené příklady

Příklad 1

Uvažujme rovnoramenný lichoběžník. Jestliže víme, že má základny o délkách 22cm a 12cm, rozhodněte, jaký je jeho obsah. Víte ještě, že délka ramene tohoto lichoběžníku je o 1 cm větší, než je jeho výška.

Řešení



S využiítím Pythagorovy věty určíme výšku lichoběžníku.

$v^2 + 5^2 = (v+1)^2$

$v^2 + 5^2 = v^2 + 2v + 1$

$v = 12$

A vypočítáme obsah lichoběžníka

$\frac{22+12}{2} \cdot 12 = 204\ (cm^2)$

Příklad 2

Vypočítejte, jaký je poloměr dráhy, která má tvar kružnice, jestliže víte, že aby běžec uběhl 4 km, musí ji proběhnout pětkrát.

Řešení

Platí, že pětinásobek obvodu kružnice jsou 4 km. Tedy v našem případě:

$5 \cdot 2\pi\mathrm{r} = 4$

$10\pi\mathrm{r} = 4$

A tedy

$$r = \frac{4}{10\pi} = 0{,}1273$$

Poloměr dráhy je přibližně 0,1273km.

2.2 Další příklady k procvičení

2.2.1 Zadání

Příklad 1

Jestliže svislá metrová tyč vrhá stín, který je dlouhý 15 metrů, určete, jak vysoký je sloup, který má v tom samém okamžiku stín dlouhý 2,4 metru.

Příklad 2

Uvažujte dvě soustředné kružnice – jedna má délku 18 metrů a druhá 26 metrů. Vypočítejte, jaký je obsah mezikruží, které je vytvořené těmito kružnicemi.

2.2.2 Výsledky

Příklad 1

$0{,}16m$

Příklad 2

$28{,}02m^2$

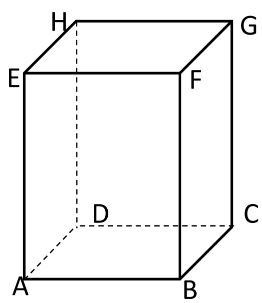
3 Stereometrie

3.1 Řešené příklady

Příklad 1

Je dán pravidelný čtyřboký hranol ABCDEFGH. Podstavná hrana má délku $\mathrm{a} = |\mathrm{AB}| = 4\mathrm{cm}$. Výška hranolu je $\mathrm{v} = |\mathrm{AE}| = 5{,}5\mathrm{cm}$. Vypočítejte, jaká je nejkratší vzdálenost bodu B od:

a) Přímky, která prochází body A a C
b) Přímky, která prochází body H a G



Řešení

a) Bod, který má od bodu B nejkratší vzdálenost, a zároveň leží na přímce procházející body A a C, je střed úsečky AC (označme ho S_{AC}).
$|BS_{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 4^2} = 2{,}83$
Hledaná vzdálenost je přibližně 2,83 cm.

b) Bod, který má od bodu B nejkratší vzdálenost, a zároveň leží na přímce procházející body H a G, je bod G. Při určování vzdálenosti vycházíme z vlastností pravoúhlého trojúhelníku BCG.
$|BG| = \sqrt{a^2 + v^2} = \sqrt{4^2 + 5{,}5^2} = 6{,}8$
Hledaná vzdálenost je přibližně 6,8 cm.

3.2 Další příklady k procvičení

3.2.1 Zadání

Příklad 1

Zvětší-li se hrana krychle dvakrát, kolikrát se zvětší množství barvy potřebné k natření krychle?

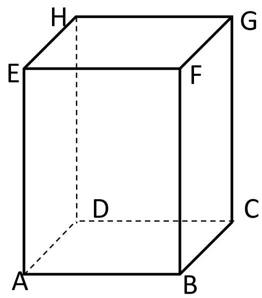
a) 8 b) 4 c) 3 d) 2 e) žádná z předcházejících odpovědí není správná

Příklad 2

Je dán pravidelný čtyřboký hranol ABCDEFGH. Podstavná hrana má délku $\mathrm{a} = |\mathrm{AB}| = 4\mathrm{cm}$. Výška hranolu je $\mathrm{v} = |\mathrm{AE}| = 5{,}5\mathrm{cm}$. Vypočítejte, jaká je nejkratší vzdálenost bodu B od:

a) Přímky, která prochází body E a G

b) Přímky, která prochází body A a G



Příklad 3

Střecha má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu. Délka jeho podstavné hrany je 8 m a výška je 0,9 m. Množství lepenky (v m^2), které je potřeba na pokrytí střechy, jestliže uvažujeme s 10% na odpad a překlady, je z intervalu:

a) $(65; 70)$ b) $\langle 70;75)$ c) $\langle 75;80)$ d) $\langle 80;85)$ e) žádná z předcházejících odpovědí není správná

3.2.2 Výsledky

Příklad 1

b

Příklad 2

a) 6,18 cm
b) 3,45 cm

Příklad 3

b

4 Analytická geometrie

4.1 Řešené příklady

Příklad 1

Rozhodněte, zda je vektor $\vec{z}(5, 2, 5)$ lineární kombinací vektorů $\vec{u}(2, 2, 3)$ a $\vec{v}(-1, 2, 1)$.

Řešení:

$5 = 2a - b$

$2 = 2a + 2b$

$5 = 3a + b$

Z prvních dvou rovnic dostáváme:

$5 = 2a - b$

$-2 = -2a - 2b$

Tedy $3 = -3b$, a následně $b = -1$. Rovněž $5 = 2a - (-1)$ a tedy $a = 2$.

Dosazením do třetí rovnice:

$5 = 3a + b$

$5 = 3 * 2 - 1$

$5 = 5$ to platí, a tedy vektor $\vec{z}(5, 2, 5)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u}(2, 2, 3)$ a $\vec{v}(-1, 2, 1)$.

Příklad 2

Určete zbývající souřadnici vektoru $\vec{u}(1, u_2, -1)$ tak, aby tento vektor byl lineární kombinací vektorů $\vec{v}(0, 1, -1)$ a $\vec{w}(7, 5, 3)$.

Řešení:

$1 = 0a + 7b$

$u_2 = a + 5b$

$-1 = -a + 3b$

Z první rovnice rovnou dostaneme $b = \frac{1}{7}$.

Ze třetí rovnice po dosazení $-1 = -a + \frac{3}{7}$ dostaneme $a = \frac{10}{7}$.

A tedy $u_2 = \frac{10}{7} + \frac{5}{7} = \frac{15}{7}$

4.2 Další příklady k procvičení

4.2.1 Zadání

Příklad 1

Přímka o rovnici $7x - 4y + 8 = 0$ má směrnici v intervalu

a) $(-3; -1)$ b) $(-1; 1)$ c) $(1; 3)$ d) $(3; 8)$ e) žádná z předcházejících odpovědí není správná

Příklad 2

Vzdálenost bodů $[5; 11]$ a $[10; 3]$ je v intervalu

a) $(0; 5)$ b) $(5; 10)$ c) $(10; 15)$ d) $(15; 20)$ e) žádná z předcházejících odpovědí není správná

Příklad 3

Rozhodněte, zda je vektor $\vec{z}(-2, 4, 6)$ lineární kombinací vektorů $\vec{u}(1, 3, -2)$ a $\vec{v}(2, 1, 1)$.

4.2.2 Výsledky

Příklad 1

c

Příklad 2

B

Příklad 3

Není lineární kombinací