EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Cvičné příklady – 1. soustředění

Soubor cvičných příkladů

6BMMA1
Matematika pro manažery

Lucie Váchová
2018

Rozvoj vzdělávací a dalších činností a podpora kvality na VŠE v Praze, r. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002342

1 Funkce a jejich využití

1.1 Řešené příklady

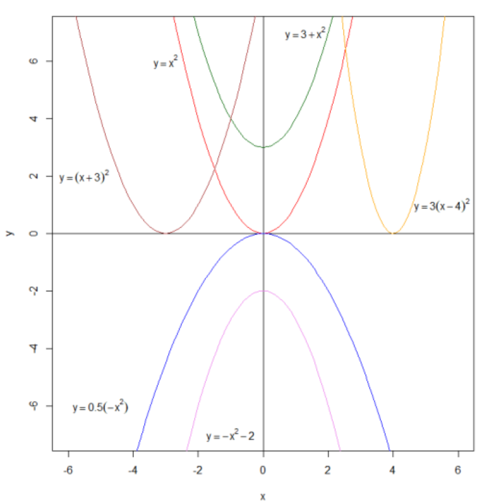
Příklad 1

Do jedné soustavy souřadnic načrtněte grafy funkcí

$y = x^2$, $y = 0{,}5 \cdot (-x^2)$, $y = 3 + x^2$, $y = -x^2 - 2$, $y = (x+3)^2$, $y = 3(x-4)^2$

Řešení

Načrtneme graf funkce $y = x^2$. Další grafy jsou modifikací tohoto grafu. Graf funkce $y = 0{,}5 \cdot (-x^2)$ získáme tak, že nejdříve vytvoříme graf funkce $y = -x^2$ (jedná se o překlopení grafu funkce $y = x^2$podle osy x) a pak násobíme každou funkční hodnotu takto získané funkce 0,5. Graf funkce $y = 3 + x^2$ získáme tak, že graf funkce $y = x^2$ posuneme o 3 nahoru (podél osy y). Graf funkce $y = -x^2 - 2$ získáme z grafu funkce $y = -x^2$ posunutím o 2 dolů (podél osy y). Graf funkce $y = (x+3)^2$ získáme z grafu funkce $y = x^2$ tak, že tento graf posuneme o 3 doleva (podél osy x). Graf funkce $y = 3(x-4)^2$ získáme tak, že graf funkce $y = x^2$ posuneme o 2 doprava (podél osy x) – tím získáme graf funkce $y = (x-4)^2$, a pak každou funkční hodnotu funkce $y = (x-4)^2$ násobíme třemi – tedy dojde k protažení grafu $y = (x-)^2$ do výšky (podél osy y).



Příklad 2

Rozhodněte, zda existuje inverzní funkce f^{-1} k funkci f. Své rozhodnutí zdůvodněte. V případě, že daná inverzní funkce existuje, nalezněte ji. Uveďte definiční obor a obor hodnot obou funkcí f i f^{-1}.

a) $f: y = e^{x-5} + 3$
b) $f: y = 5x^2 + 7$, jestliže definiční obor $D_f = R$

Řešení

Inverzní funkce existuje pouze k funkci prosté. Nejprve tedy musíme rozhodnout, zda funkce, kterou máme v zadání, je prostá. Funkce je prostá, pokud pro $x_1, x_2 \in D_f$ platí, že pro $x_1 \neq x_2$ je i $f(x_1) \neq f(x_2)$.

a) Funkce $f: y = e^{x-5} + 3$ je prostá. Inverzní funkce k ní tedy existuje.

$D_f = R, H_f = (3, \infty)$

Prohodíme x a y a vyjádříme y

$x = e^{y-5} + 3$

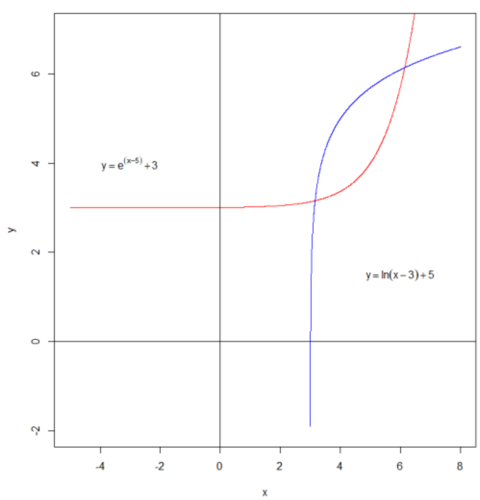
$x - 3 = e^{y-5}$

$ln(x - 3) = lne^{y-5}$

$ln(x - 3) = y - 5$

$y = ln(x - 3) + 5$

Našli jsme inverzní funkci $f^{-1}: y = ln(x - 3) + 5$. Pro ni platí $D_{f^{-1}} = (3, \infty)$ a $H_{f^{-1}} = R$.



b) Funkce $f: y = 5x^2 + 7$ s definičním oborem $D_f = R$ není prostá. Nemůžeme k ní tedy najít funkci inverzní.

Příklad 3

Vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-cos2x}{xsinx}$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+6}+4}{1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-2x+5}{2x^3-x^2+4}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}}{x}$

Řešení

a) Čitatel upravíme na základě

$$x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4\pm 2}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

Jmenovatel upravíme s využitím vzorce $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$. Dostáváme

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+3}{x^2-x+1} = \frac{-1+3}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

b) Čitatel upravíme $cos2x = cos^2x - sin^2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos2x}{xsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(cos^2x-sin^2x)}{xsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{1-cos^2x+sin^2x}{xsinx}$$

Dále využijeme vzorce $cos^2x + sin^2x = 1$ a dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos2x}{xsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(cos^2x-sin^2x)}{xsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{1-cos^2x+sin^2x}{xsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{sin^2x+ sin^2x}{xsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{2sin^2x}{xsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{2sinx}{x}$$

A protože platí $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$, dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos2x}{xsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(cos^2x-sin^2x)}{xsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{1-cos^2x+sin^2x}{xsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{sin^2x+ sin^2x}{xsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{2sin^2x}{xsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{2sinx}{x} = 2$$

c) Dosadíme -2 a dostáváme

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+6}+4}{1-x} = \frac{\sqrt{-2+6}+4}{1-(-2)} = \frac{6}{3} = 2$$

d) Při limitě v nekonečnu dělíme čitatele i jmenovatele zlomku nejvyšší mocninou proměnné ve jmenovateli, zde tedy x^3

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-2x+5}{2x^3-x^2+4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}} = \frac{0-0+0}{2-0+0} = 0$$

e) Čitatele i jmenovatele násobíme sdruženým výrazem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x}}{\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{6+x-(6-x)}{x(\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{(\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x})} = \frac{2}{(\sqrt{6+0}+\sqrt{6-0})} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Pozn.: některé z úloh se dají řešit s využitím tzv. L´Hospitalova pravidla (látka v rámci 3. soustředění).

Příklad 4

Najděte asymptoty grafu funkce $y = \frac{1-x^2}{x-2}$

Řešení:

Svislou asymptotu hledáme v bodě 2 – zjišťujeme, zda v tomto bodě má funkce limitu zleva nebo zprava $+\infty$ nebo $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0^+} \right\| = -\infty$ (jmenovatel bude kladné číslo)

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0^-} \right\| = +\infty$ (jmenovatel bude záporné číslo)

Čili existuje svislá asymptota, která má rovnici $x = 2$.

Vodorovná/šikmá asymptota – tu hledáme v podobě $y = kx + q$, kde

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

$q = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$

V našem případě tedy

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1-x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{0-1}{1-0} = -1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} - (-1)x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-x^2+x(x-2)}{x-2} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-2}{1-\frac{2}{x}} = \frac{0-2}{1-0} = -2$$

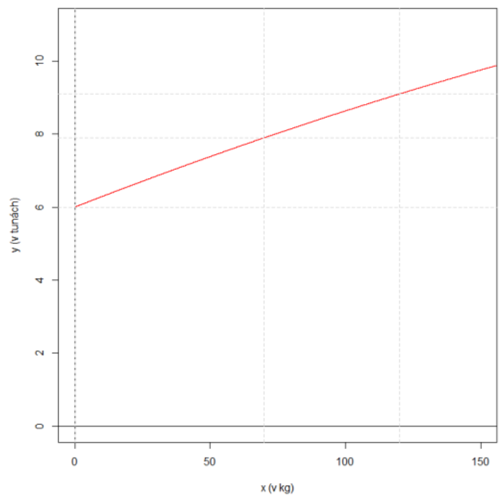
Analogicky řešíme pro $x \to -\infty$, vyjde $k = -1, q = -2$.

Dosadíme zpět do rovnice $y = kx + q$ a dostáváme šikmou asymptotu o rovnici $y = -x - 2$.

Příklad 5

Při výzkumu účinnosti ochranných prostředků na množství úrody jablek (vždy ze sadu o velikosti 1 hektar) byly zjištěny následující údaje: Nepoužije-li se žádný ochranný prostředek, dosáhne množství sklizených jablek hodnoty 6 tun. V případě použití 70 kg ochranných prostředků bude úroda 7,9 tun. Při použití 120 kg prostředků bude úroda 9,1 tun. Navrhněte funkci, která by vyjadřovala závislost úrody y (tun/ha) na počtu x kg ochranných prostředků.

Řešení:



Můžeme např. počítat s tím, že se jedná o kvadratickou funkci - ta je dána předpisem $y = ax^2 + bx + c$. Vytvoříme soustavu tři rovnic o třech neznámých tak, že do obecného tvaru rovnice dosadíme souřadnice bodů, kterými má graf funkce procházet:

$6 = 0a + 0b + c$

$7{,}9 = 70^2a + 70b + c$

$9{,}1 = 120^2a + 120b + c$

Z první rovnice dostaneme, že $c = 6$, a to dosadíme do zbývajících dvou rovnic.

$1{,}9 = 4900a + 70b$

$3{,}1 = 14400a + 120b$

Po úpravě dostaneme z první rovnice

$a = \frac{1{,}9 - 70b}{4900}$

A dosazením do druhé rovnice

$3{,}1 = 14400\frac{1{,}9 - 70b}{4900} + 120b$

$3{,}1 = 144\frac{1{,}9 - 70b}{49} + 120b$

$3{,}1 \cdot 49 = 144(1{,}9 - 70b) + 120 \cdot 49b$

$151{,}9 = 273{,}6 - 10080b + 5880b$

$-121{,}7 = -4200b$

$b = 0{,}02898$

$a = \frac{1{,}9-70b}{4900} = \frac{1{,}9-70\cdot 0{,}02898}{4900} = -0{,}00002624$

Hledaná funkce je $y = -0{,}00002624x^2 + 0{,}02898x + 6$

Můžeme si ověřit správnost našich výpočtů tak, že do nalezené rovnice dosadíme body ze zadání:

$[0; 6]$ $y = -0{,}00002624 \cdot 0^2 + 0{,}02898 \cdot 0 + 6 = 6$

$[70; 7{,}9]$ $y = -0{,}00002624 \cdot 70^2 + 0{,}02898 \cdot 70 + 6 = 7{,}900024$

$[120; 9{,}1]$ $y = -0{,}00002624 \cdot 120^2 + 0{,}02898 \cdot 120 + 6 = 9{,}099744$

1.2 Další příklady k procvičení

1.2.1 Zadání

Příklad 1

Do jedné soustavy souřadnic načrtněte grafy funkcí

$y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 3$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x} - 2$, $y = -\sqrt{x-2}$, $y = 2\sqrt{-x}$

Příklad 2

Rozhodněte, zda existuje inverzní funkce f^{-1} k funkci $f\colon y = 3 + 2x^2$, jestliže definiční obor $D_f = (-\infty; 0\rangle$. Své rozhodnutí zdůvodněte. V případě, že daná inverzní funkce existuje, nalezněte ji. Uveďte definiční obor a obor hodnot obou funkcí f i f^{-1}.

Příklad 3

Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{6x+8}{4+x^3}$
b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{7x^3+7x^5-2}{7x^5+3x^2-x+14}$
c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+5x}-1}$

Příklad 4

Najděte asymptoty grafu funkce

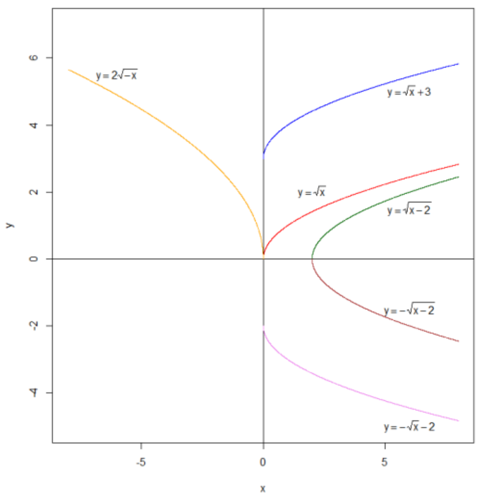
a) $y = \frac{x^2+1}{x+3}$
b) $y = 6\mathrm{x} + \frac{4}{x-2}$

Příklad 5

Firma COMPANY se rozhoduje mezi dvěma variantami uspořádání výrobní linky. Varianta 1 znamená roční fixní náklady ve výši 125 000 Kč a variabilní náklady 41 Kč na jednotku vyrobeného zboží. U varianty 2 jsou roční fixní náklady ve výši 221 750 Kč a variabilní náklady na jednotku produkce 26 Kč. Určete, pro jaké množství vyrobených jednotek za rok je z hlediska nákladů výhodnější varianta 1, a pro jaké množství je výhodnější varianta 2 (vyřešte graficky a také vyjádřete v podobě intervalů). Uveďte rovněž i to, při jakém množství jsou varianty stejně výhodné?

1.2.2 Výsledky

Příklad 1



Příklad 2

$H_f = \langle 3, \infty)$

$f^{-1}: y = -\sqrt{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$, $D_{f^{-1}} = \langle 3, \infty)$ a $H_{f^{-1}} = (-\infty; 0\rangle$

Příklad 3

a) $\frac{14}{129}$
b) 1
c) $\frac{2}{5}$

Příklad 4

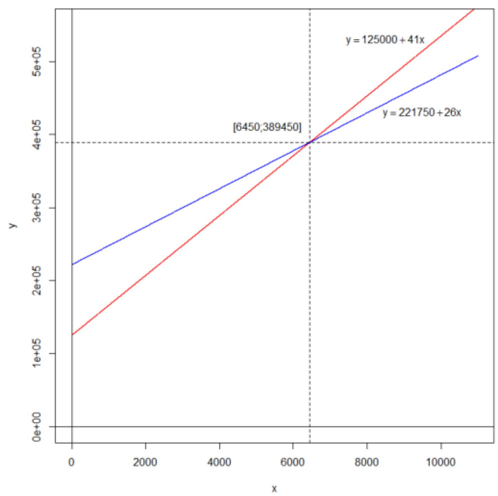
a) $\mathrm{x} = -3, \mathrm{y} = \mathrm{x} - 3$
b) $\mathrm{x} = 2, \mathrm{y} = 6\mathrm{x}$

Příklad 5

	Množství vyrobených jednotek za rok (interval)
Varianta 1 je výhodnější pro	$\langle 0; 6450)$

Varianta 2 je výhodnější pro	$(6450; \infty)$

Varianty jsou stejně výhodné pro 6450 vyrobených jednotek za rok.



2 Posloupnosti a jejich využití

2.1 Řešené příklady

Příklad 1

Vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-n^5}{2n^3+3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n+5^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+3)}-n\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{n+2}$

Řešení

a) dělíme čitatele i jmenovatele zlomku nejvyšší mocninou proměnné ze jmenovatele – v našem případě n^3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-n^5}{2n^3+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^2}-n^2}{2+\frac{3}{n^3}}=\frac{-\infty}{2}=-\infty$$

Nebo vyškrtáme tak, aby zůstaly v čitateli i ve jmenovateli jen nejvyšší mocniny

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-n^5}{2n^3+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^5}{2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{2}=-\infty$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{5^n}-\frac{3^n}{5^n}}{\frac{4^n}{5^n}+\frac{5^n}{5^n}}=\frac{0-0}{0+1}=0$

c) Násobíme sdruženým výrazem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+3)}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n(n+3)}-n\right)\frac{\left(\sqrt{n(n+3)}+n\right)}{\left(\sqrt{n(n+3)}+n\right)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+3)-n^2}{\sqrt{n(n+3)}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n}+\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{\frac{n^2+3n}{n^2}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+0}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

d) Řešíme s využitím $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$. Převedeme do odpovídajícího tvaru s využitím substituce $m=n+3$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{n+2}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m-5}{m}\right)^{m-1}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{-5}{m}\right)^{m-1}=\lim_{m\to\infty}\frac{\left(1+\frac{-5}{m}\right)^m}{\left(1+\frac{-5}{m}\right)^1}=\frac{\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{-5}{m}\right)^m}{\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{-5}{m}\right)^1}=\frac{e^{-5}}{1+0}=e^{-5}$$

Příklad 2

Rozhodněte, zda je řada geometrická (dokažte výpočtem pro všechna n)

$\sum 7^n \cdot 3 \cdot 4^{n-1}$

Řešení

Zjišťujeme, zda je podíl každých dvou sousedních členů konstantní – tj. je nezávislý na n.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7^{n+1} \cdot 3 \cdot 4^n}{7^n \cdot 3 \cdot 4^{n-1}} = \frac{7^n \cdot 7^1 \cdot 3 \cdot 4^n}{7^n \cdot 3 \cdot 4^n \cdot 4^{-1}} = 28$

Řada je geometrická.

Příklad 3

Uvažujme, že roční výroba v určité firmě dosahuje hodnoty 2320000 Kč. Jestliže je plánované roční zvýšení výroby 3%, určete, jaké hodnoty bude dosahovat roční výroba firmy za 4 roky.

Řešení

Označme počáteční hodnotu h_0. Potom zvětšení hodnoty o p% můžeme vyjádřit jako

$h_1 = h_0 + h_0 \frac{p}{100} = h_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

A pokud se zvětší hodnota h_1 opět o p%, máme

$h_2 = h_1 + h_1 \frac{p}{100} = h_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = h_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

A tedy

$h_2 = h_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$

Za n období pak máme hodnotu

$h_n = h_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Čili v našem případě

$h_n = 2320000 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 = 2611180\ (Kč)$

Příklad 4

Při složeném úročení s roční úrokovou mírou 5% (už po zdanění) se vložená suma zdvojnásobí za zhruba kolik let? Uvažujeme roční připisování úroků.

Řešení

Označme si:

K_n… budoucí hodnota kapitálu

K_0… současná hodnota kapitálu

i… roční úroková sazba (sazba p.a.)

n… počet úrokových období, po které byl kapitál uložen

Potom na základě $K_n = K_0(1+i)^n$ dostáváme

$2K_0 = K_0(1+i)^n$

$2 = (1+i)^n$

$2 = (1+0{,}05)^n$

$2 = 1{,}05^n$

$ln2 = ln1{,}05^n$

$ln2 = n \cdot ln1{,}05$

$n = \frac{ln2}{ln1{,}05} \cong 14{,}2$ (let)

2.2 Další příklady k procvičení

2.2.1 Zadání

Příklad 1

Vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n-10}{4n^2+2n+50}$
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-6}{n+4}\right)^{n+3}$
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-n^6}{2n^3+4}$
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{3n+2}\right)$
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n}\right)$
f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+\sqrt{n+5}}{\sqrt{3n^2-2}}$
g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-8n+5} - n\right)$
h) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n^3 - 7n + 22)$

Příklad 2

Zjistěte, zda posloupnost $\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická (dokažte výpočtem pro všechna n), a pokud ano, určete první člen a kvocient.

Příklad 3

Při jaké úrokové sazbě se zdvojnásobí uložený kapitál za 5 let při ročním připisování úroků?

2.2.2 Výsledky

Příklad 1

a) $\frac{5}{4}$
b) e^{-10}
c) $-\infty$
d) ∞
e) 0
f) ∞
g) -4
h) ∞

Příklad 2

Je geometrická, $q = \frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{2}{9}$

Příklad 3

Při roční úrokové sazbě 14,87%.