EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

1. Interpolační funkce

Problém: *Pro funkci danou tabulkou máme statistická data, nebo data získaná měřením v bodech* $x_0, x_1, \cdots, x_m \in \mathbf{R}$. *Chceme na základě těchto hodnot určit hodnoty v dalších bodech intervalu* (x_0, x_m). *To můžeme udělat pomocí interpolační funkce.*

Interpolační polynomy

Označme $f(x_i) = y_i, i = 0, \cdots, m$. Interpolační polynom budeme hledat ve tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0. \tag{1}$$

Exponent *n* u nejvyšší mocniny nenulového členu nazýváme stupeň polynomu . Dosazením za *x* dostaneme rovnice

$$a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \cdots + a_0 = y_i, i = 0, \cdots, m. \tag{2}$$

Neznámé koeficienty $a_n, \cdots, a_0$ jsou řešením soustavy $m + 1$ rovnic pro $n + 1$ neznámých. Tato soustava má pro $m = n$ právě jedno řešení.

Lagrangeův interpolační polynom

Úlohu budeme řešit postupně: položíme $y_j = 1$ a $y_i = 0$ pro $i = 0, \cdots, n, i \neq j$. Pro každé *j* má hledaný polynom $\overline{f_j}$ kořeny $x_i, i = 0, \cdots, n, i \neq j$. Je to tedy násobek kořenových činitelů

$$\bar{f}_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdot\cdots\cdot(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdot\cdots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot\cdots\cdot(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdot\cdots\cdot(x_j-x_n)}. \tag{3}$$

Lineární kombinace polynomů (3) bude hledaným polynomem

$$f(x) = y_0 \bar{f}_0(x) + y_1 \bar{f}_1(x) + \cdots + y_n \bar{f}_n(x). \tag{4}$$

Newtonův interpolační polynom

Hledejme nyní polynom jako lineární kombinaci jednodušších polynomů

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1}). \tag{5}$$

Dosadíme-li postupně do polynomu (5) za *x* ,dostaneme soustavu lineárních rovnic pro neznámé koeficienty

$y_0 = a_0$

$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$

$y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$ (6)

. . . .

$y_n = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_{n-1}).$

Protože interpolační polynom je hodnotami x_i, y_i určen jednoznačně, jsou Lagrangeův a Newtonův polynom stejné.

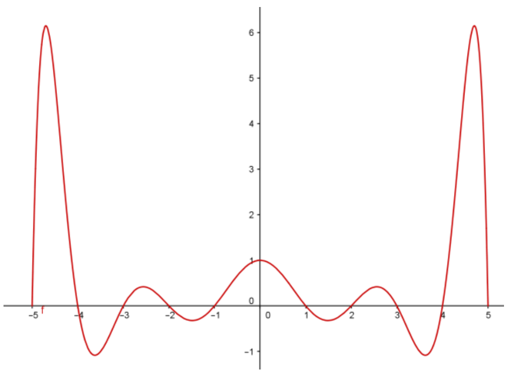
Nevýhody a výhody obou polynomů:

1. Výhodou Lagrangeova polynomu je explicitní vyjádření bez složitých výpočtů. Nevýhodou ale je velké množství operací při výpočtu funkční hodnoty v bodě. Další nevýhodou je, že přidáme-li další dvojici hodnot x_i, y_i, změní se vyjádření všech sčítanců (3).
2. Nevýhodou Newtonova polynomu je, že se musí vyřešit soustava (6). Výhodou ale je, že má trojúhelníkový tvar. Další výhodou je, že k výpočtu funkční hodnoty můžeme použít Hornerovo schéma $f(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_1)(a_2 + (x - x_2)(a_3 +$

   $\cdots + (x - x_{n-3})(a_{n-2} + (x - x_{n-2})(a_{n-1} + (x - x_{n-1})a_n)\cdots).$

   Další výhodou tohoto polynomu je snadná úprava v (5) při přidání nové dvojice hodnot, na konec přijde další sčítanec. Soustava (6) se rozšíří o další rovnici.

Společnou nevýhodou interpolačních polynomů je jejich sklon k oscilaci. Např. budeme-li mít 11 hodnot 0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,5,-5 a podmínku $f(0) = 1, f(x_i) = 0, i = 1, \cdots, 10$, je interpolační polynom na obr. Velkou oscilaci na krajích intervalu můžeme odstranit volbou malého rozestupu daných bodů. Lepší řešení dává interpolace spline-funkcí.



Zdroj: autor

Kubická spline-funkce

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$ aproximujeme funkcí φ, která je složena z kubických polynomických funkcí definovaných na intervalech $\langle x_i, x_{i+1}\rangle, i = 0,1,\cdots,n-1, x_0 = a, x_n = b$, tj.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in \langle x_0, x_1\rangle \\ \varphi_1(x), & x \in \langle x_1, x_2\rangle \\ & \cdots \\ \varphi_{n-1}(x), & x \in \langle x_{n-1}, x_n\rangle \end{cases}, \text{ kde}$$

$$\varphi_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, j = 0,1,\cdots,n-1.$$

Pro polynom φ musíme určit 4*n* koeficientů a_j, b_j, c_j, d_j. K tomu potřebujeme 4*n* podmínek.

Z požadavku spojitosti funkce φ a spojitosti její 1. a 2. derivace na intervalu $\langle a, b\rangle$ dostaneme $4n - 2$ podmínek:

$$\varphi(x_i) = f(x_i), i = 0,1,\cdots,n, \tag{7}$$

$$\varphi_i(x_{i+1}) = \varphi_{i+1}(x_{i+1}), i = 0,\cdots,n-2, \tag{8}$$

$$\varphi'_i(x_{i+1}) = \varphi'_{i+1}(x_{i+1}), i = 0,\cdots,n-2, \tag{9}$$

$$\varphi''_i(x_{i+1}) = \varphi''_{i+1}(x_{i+1}), i = 0,\cdots,n-2. \tag{10}$$

Dvě zbývající podmínky volíme libovolně, nejčastěji jako okrajové podmínky, tj. volíme hodnoty 1. resp. 2. derivace v krajních bodech *a, b* intervalu.

Nyní odvodíme hledané koeficienty za předpokladu, že známe hodnoty M_i druhých derivací funkce φ ve všech vnitřních bodech $x_i, i = 1,\cdots,n-1$. Tyto hodnoty se nazývají momenty spline-funkce. Máme tedy

$$M_i = \varphi''(x_i), i = 1,\cdots,n-1. \tag{11}$$

Dále označíme $h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0,\cdots,n-1$, $f(x_i) = y_i$ a ještě vypočítáme derivace

$$\varphi'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2,\ \varphi''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i).$$

Z podmínky (7) a předpokladu (11) vyplývá

$$\boldsymbol{a_i = y_i, c_i = \frac{1}{2}M_i.}$$

Rozepsaná podmínka (10) je

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1} \Rightarrow d_i = \frac{1}{3h_i}(c_{i+1} - c_i) \Rightarrow \boldsymbol{d_i} = \frac{\boldsymbol{M_{i+1} - M_i}}{\boldsymbol{6h_i}}.$$

Poslední koeficient vypočítáme z podmínky (8)

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_{i+1} \Rightarrow \boldsymbol{b_i} = \frac{\boldsymbol{y_{i+1} - y_i}}{\boldsymbol{h_i}} - \frac{\boldsymbol{h_i}}{\boldsymbol{6}}(\boldsymbol{M_{i+1} + 2M_i}).$$

Nyní musíme ještě určit momenty M_i. Použijeme podmínku (9), z které po úpravě dostaneme soustavu $n-1$ rovnic pro $n-1$ neznámých momentů $M_1, \cdots, M_{n-1}$

$$h_i M_i + 2(h_i + h_{i+1})M_{i+1} + h_{i+1}M_{i+2} = 6\left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right).$$

To je třídiagonální soustava, která se řeší Gaussovou eliminací. Rozepsaná do maticového tvaru je

$$\begin{pmatrix} a_{11} & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & a_{22} & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & a_{33} & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ii} = 2(h_{i-1} + h_i)$.

Kvadratická spline-funkce

$$\varphi_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2, x \in \langle x_0, x_1 \rangle\,,$$

$$\varphi_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2, x \in \langle x_1, x_2 \rangle,$$

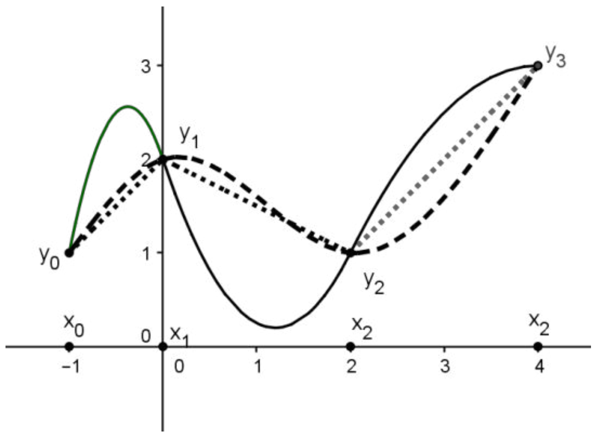
. . . .

$$\varphi_{n-1}(x) = a_{n-1} + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}(x - x_{n-1})^2, x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle.$$

Označíme $h_i = x_{i+1} - x_i$. $3n$ koeficientů $a_i, b_i, c_i, i = 0, \cdots, n-1$, určíme z podmínek:

1. $\varphi_i(x_i) = y_i \Rightarrow \mathbf{a_i} = \mathbf{y_i}, i = 0, \cdots, n,$
2. $\varphi_i(x_{i+1}) = \varphi_{i+1}(x_{i+1}) \Rightarrow a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = a_{i+1}, i = 1, \cdots, n-1,$
3. $\varphi'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i), \varphi'_i(x_{i+1}) = \varphi'_{i+1}(x_{i+1}), i = 1, \cdots, n-1,$
   $b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}.$

To je *3n* -1, jednu podmínku zvolíme jako okrajovou. Dále označíme $\varphi'_i(x_i) = \mathbf{b_i} = \mathbf{M_i}$. Potom je z 3. podmínky $\mathbf{c_i} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2h_i}}(\mathbf{M_{i+1}} - \mathbf{M_i})$ a z 2. podmínky dostáváme soustavu rovnic pro M_i: $M_i + M_{i+1} = \frac{2}{h_i}(y_{i+1} - y_i), i = 0, \cdots, n-1$.



Zdroj: autor

B-spline funkce

Interpolace dat $[x_i, y_i], i = 0,1, \cdots, n$ pomocí bázových funkcí.

Rekurentní vztah pro bázové funkce B-spline funkce stupně $k-1$:

$$B_{i,1}(x) = 1, x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle,$$

$$B_{i,1}(x) = 0, x \in (-\infty, x_i) \cup (x_{i+1}, +\infty), i = 0, \cdots, n,$$

$$B_{i,k}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k-1} - x_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{x_{i+k} - x}{x_{i+k} - x_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x).$$

Spline funkce $s(x)$ je lineární kombinací bázových funkcí

$$s(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} \alpha_i B_{i,k}(x), x \in \langle x_0, x_n \rangle, \alpha_i \in \mathbf{R}.$$

Vlastnosti bázových funkcí:

a) $B_{i,k}(x) > 0, x \in \langle x_i, x_{i+k} \rangle,$
b) $B_{i,k}(x) = 0, x \notin \langle x_i, x_{i+k} \rangle,$
c) $\sum_{i=r+1-k}^{s-1} B_{i,k}(x) = 1, \ \ x \in (x_r, x_s), \ \ 0 \le r < s \le n.$

Označíme $h = x_{i+1} - x_i$.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Konstantní B-spline:

$B_{i,1}(x) = 1, x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$, $B_{i,1}(x) = 0, x \in (-\infty, x_i) \cup (x_{i+1}, +\infty)$

$B_{i+1,1}(x) = 1, x \in \langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle$, $B_{i+1,1}(x) = 0, x \in (-\infty, x_{i+1}) \cup (x_{i+2}, +\infty)$

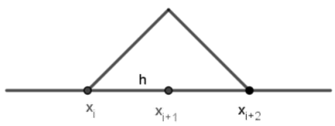
Lineární B-spline:

$$B_{i,2}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} B_{i,1}(x) + \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} B_{i+1,1}(x)$$

$B_{i,2}(x) = 0, x \in (-\infty, x_i) \cup (x_{i+2}, +\infty)$,

$B_{i,2}(x) = \frac{x-x_i}{h}$, $x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$,

$B_{i,2}(x) = \frac{x_{i+2}-x}{h}$, $x \in \langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle$.



Zdroj: autor

Kvadratická B-spline:

$$B_{i,3}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+2} - x_i} B_{i,2}(x) + \frac{x_{i+3} - x}{x_{i+3} - x_{i+1}} B_{i+1,2}(x)$$

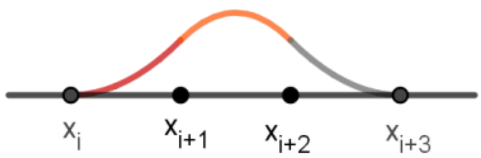
$B_{i,3}(x) = 0, x \in (-\infty, x_i) \cup (x_{i+3}, +\infty)$,

$B_{i,3}(x) = \frac{(x-x_i)^2}{2h^2}, x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$,

$B_{i,3}(x) = \frac{(x-x_i)(x_{i+2}-x)}{2h^2} + \frac{(x_{i+3}-x)(x-x_{i+1})}{2h^2}, x \in \langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle$,

$B_{i,3}(x) = \frac{(x_{i+3}-x)^2}{2h^2}, x \in \langle x_{i+2}, x_{i+3} \rangle$,

Kubická B-spline:



Zdroj: autor

$$B_{i,4}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+3} - x_i} B_{i,3}(x) + \frac{x_{i+4} - x}{x_{i+4} - x_{i+1}} B_{i+1,3}(x)$$

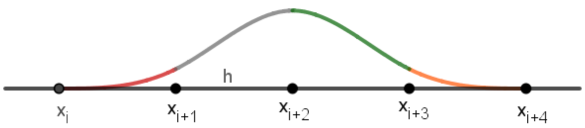
$B_{i,4}(x) = 0, x \in (-\infty, x_i) \cup (x_{i+4}, +\infty),$

$B_{i,4}(x) = \frac{(x-x_i)^3}{6h^3}, x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle,\ \ B_{i,4}(x_i) = 0, B_{i,4}(x_{i+1}) = \frac{1}{6},$

$B_{i,4}(x) = \frac{x-x_i}{3h}\left(\frac{(x-x_i)(x_{i+2}-x)}{2h^2} + \frac{(x_{i+3}-x)(x-x_{i+1})}{2h^2}\right) + \frac{(x_{i+4}-x)(x-x_{i+1})^2}{6h^3}, x \in \langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle,$
$B_{i,4}(x_{i+1}) = \frac{1}{6}, B_{i,4}(x_{i+2}) = \frac{2}{3},$

$B_{i,4}(x) = \frac{x-x_i}{3h}\frac{(x_{i+3}-x)^2}{2h^2} + \frac{x_{i+4}-x}{3h}\left(\frac{(x-x_{i+1})(x_{i+3}-x)}{2h^2} + \frac{(x_{i+4}-x)(x-x_{i+2})}{2h^2}\right), x \in \langle x_{i+2}, x_{i+3} \rangle,$
$B_{i,4}(x_{i+2}) = \frac{2}{3}, B_{i,4}(x_{i+3}) = \frac{1}{6},$

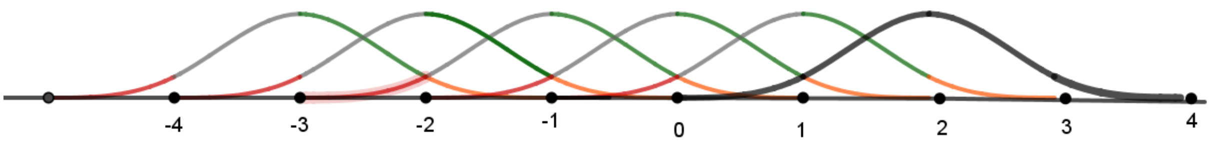
$B_{i,4}(x) = \frac{(x_{i+4}-x)^3}{6h^3}, x \in \langle x_{i+3}, x_{i+4} \rangle, B_{i,4}(x_{i+3}) = \frac{1}{6}, B_{i,4}(x_{i+4}) = 0.$



Zdroj: autor

$$s(x) = \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_{i,4}(x),\ \ s(x_j) = y_j, j = 0, \cdots, n.$$

Koeficientů je $n + 3$, bodů $n + 1$ a dvě podmínky: $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$.



Zdroj: autor

Derivace v krajních bodech:

$\langle 0,1 \rangle$: $B(x) = \frac{1}{6}x^3, B''(x) = x,$

$\langle 1,2 \rangle$: $B(x) = \frac{1}{6}(-3x^3 + 12x^2 - 12x + 4), B''(x) = 4 - 3x,$

$\langle 2,3 \rangle$: $B(x) = \frac{1}{6}(3x^3 - 24x^2 + 60x - 44), B''(x) = 3x - 8,$

$\langle 3,4\rangle$: $B(x) = \frac{1}{6}(4-x)^3, B''(x) = 4-x.$

$\alpha_{-4}x_0 + \alpha_{-3}(4-3x_0) + \alpha_{-2}(3x_0-8) + \alpha_{-1}(4-x_0) = y_0,$

$x_0 = 0 \Rightarrow 4\alpha_{-3} - 8\alpha_{-2} + 4\alpha_{-1} = y_0,$

$\alpha_{n-2}x_n + \alpha_{n-1}(4-3x_n) + \alpha_n(3x_n-8) + \alpha_{n+1}(4-x_n) = y_n,$

$x_n = 4 \Rightarrow 4\alpha_{n-2} - 8\alpha_{n-1} + 4\alpha_n = y_n,$

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{-3} \\ \alpha_{-2} \\ \alpha_{-1} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

2. Lineární regrese

aproximujeme funkci danou *n* body: $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \cdots, [x_n, y_n]$ lineární funkcí

$$f: Y = kX + q$$

takovou, aby se její funkční hodnoty $Y_1 = f(x_1), Y_2 = f(x_2), \cdots, Y_n = f(x_n)$ co nejméně lišily od daných hodnot $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Za kritérium si vezmeme podmínku minima součtu

$$S = (y_1 - Y_1)^2 + (y_2 - Y_2)^2 + \cdots + (y_n - Y_n)^2.$$

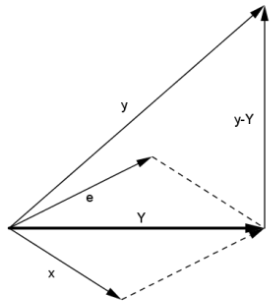
Do součtu *S* dosadíme funkční hodnoty funkce $f(x_i) = kx_i + q$

$$S = (y_1 - kx_1 - q)^2 + (y_2 - kx_2 - q)^2 + \cdots + (y_n - kx_n - q)^2.$$

Označíme $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\mathbf{e} = (1,1, \cdots, 1)$ vektory v $\mathbf{R}^n$. Potom součet *S* můžeme zapsat pomocí těchto vektorů jako

$$S = \big(\mathbf{y} - (k\mathbf{x} + \mathrm{q}\mathbf{e})\big)^2.$$

Hledáme tedy vektor $\mathbf{Y} = k\mathbf{x} + \mathrm{q}\mathbf{e}$ tak, aby vektor rozdílu **y - Y** měl minimální velikost. To nastane tehdy, bude-li vektor **y – Y** kolmý na vektory **x, e**.



Zdroj: autor

Vektory jsou kolmé, je-li jejich skalární součin nulový, dostáváme tak dvě vektorové rovnice:

$$(\mathbf{y} - k\mathbf{x} - \mathrm{q}\mathbf{e}) \cdot \mathbf{x} = 0,\ \ (\mathbf{y} - k\mathbf{x} - \mathrm{q}\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Po rozepsání skalárního součinu dostáváme soustavu dvou rovnic pro dva neznámé parametry k, q :

$$k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) + q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

$$k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) + q(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{y}$$

Soustavu vyřešíme Cramerovým pravidlem

$$k = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} & \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} \\ \mathbf{e}\cdot\mathbf{y} & \mathbf{e}\cdot\mathbf{e} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} & \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{e}\cdot\mathbf{e} \end{vmatrix}},\ q = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} & \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \\ \mathbf{e}\cdot\mathbf{x} & \mathbf{e}\cdot\mathbf{y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} & \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{e}\cdot\mathbf{e} \end{vmatrix}}.$$

3. Metoda nejmenších čtverců

Zobecnění lineární regrese tak, že aproximační funkce pro body $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \cdots, [x_n, y_n]$ bude zvolená funkce spojitá na intervalu $\langle x_1, x_n \rangle$. Dané body a hodnoty zvolené funkce určují bázové vektory. Potom podle předchozího hledáme lineární kombinaci $\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + \cdots + v_m\mathbf{b}_m$ vektorů z $\mathbf{R}^n$, $m \leq n$, takovou, aby co nejlépe nahrazovala daný vektor $\mathbf{u} \in R^n$. Rozdíl $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ musí být kolmý na ***bázové vektory*** $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m$, tj. $(\mathbf{u} - \mathbf{v}\ ) \cdot \mathbf{b}_i = 0$, $i = 1,2, \cdots, m$. Po dosazení vektoru **v** dostáváme soustavu *m* rovnic (normálních rovnic) pro *m* neznámých

$$(v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + \cdots + v_m\mathbf{b}_m)\mathbf{b}_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_i, \text{ tj.}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_1\mathbf{b}_m \\ \mathbf{b}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_2\mathbf{b}_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{b}_m\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_m\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_m\mathbf{b}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ \cdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{u}\mathbf{b}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{u}\mathbf{b}_m \end{pmatrix}.$$

Příklad. ***Kvadratická regrese.***

Hledáme kvadratickou funkci

$$f: Y = aX^2 + bX + c,$$

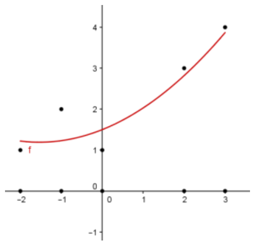
která aproximuje *n* bodů: $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \cdots, [x_n, y_n]$.

Bázové vektory budou: $\mathbf{b}_1 = (x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2)$, $\mathbf{b}_2 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\mathbf{b}_3 = (1,1,\cdots,1)$, $\mathbf{u} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, vektor parametrů $(v_1, v_2, v_3) = (a, b, c)$. Počítejme pro body $[-2,1], [-1,2], [0,1], [2,3], [3,4]$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 & 9 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 & 9 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 114 & 26 & 18 \\ 26 & 18 & 2 \\ 18 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2536} \begin{pmatrix} 86 & -94 & -272 \\ -94 & 246 & 240 \\ -272 & 240 & 1376 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 54 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2536} \begin{pmatrix} 336 \\ 1008 \\ 3808 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.4 \\ 1.5 \end{pmatrix}, y = 0.13x^2 + 0.4x + 1.5$$



Zdroj: autor

4. Numerický výpočet derivace

Funkci danou tabulkou hodnot vyjádříme interpolačním nebo aproximačním polynomem a ten pak derivujeme.

Pro Lagrangeův interpolační polynom s 3 body: $[x_0, y_0]$, $[x_0 + h, y_1]$, $[x_0 + 2h, y_2]$

$$y(x) = y_0 \frac{(x - x_0 - h)(x - x_0 - 2h)}{2h^2} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_0 - 2h)}{-h^2} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2h^2}.$$

Položíme $x - x_0 = ht$, potom

$$y(x) = y_0 \frac{(t-1)(t-2)}{2} - y_1 t(t-2) + y_2 \frac{t(t-1)}{2}.$$

$dx = hdt$

$$y'(x) = \frac{1}{2h}\big(y_0(2t-3) - 4y_1(t-1) + y_2(2t-1)\big).$$

Pro bod $[x_0, y_0]$ je $t = 0$ a derivace je

$$y'(x_0) = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}.$$

Pro bod $[x_0 + h, y_1]$ je $t = 1$ a ***1. centrální derivace*** je

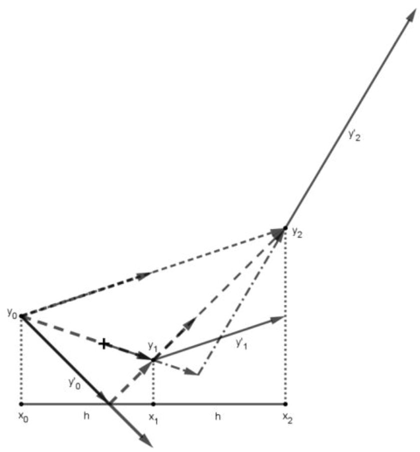
$$y'(x_1) = \frac{-y_0 + y_2}{2h}.$$

Pro bod $[x_0 + 2h, y_2]$ je $t = 2$ a derivace je

$$y'(x_2) = \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}.$$

Druhá derivace je **2. centrální diference**:

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2).$$



$$y'(x_0) = \frac{3}{2h}\left[(y_1 - y_0) - \frac{1}{3}(y_2 - y_1)\right],$$

$$y'(x_1) = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0),$$

$$y'(x_2) = \frac{3}{2h}\left[(y_2 - y_1) - \frac{1}{3}(y_1 - y_0)\right].$$

Zdroj: autor

5. Určitý integrál a numerická integrace

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Graf funkce f spojité a nezáporné na $\langle a, b\rangle$, určují v rovině množinu $\mathbf{M} = \{[x, y] \in R^2, a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$. Její obsah je $\int_a^b f(x)dx$, ***určitý integrál*** od a (dolní mez) do b (horní mez) z funkce f. Část plochy, která je nad osou x se bere se znaménkem plus, část pod osou x se znaménkem minus. Určitý integrál počítáme pomocí primitivní funkce. Platí:

1. $\int_a^b \propto f(x)dx = \propto \int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ \ c \in \langle a, b\rangle$
4. $\int_a^a f(x)dx = 0$
5. Je-li f spojitá na $\langle a, b\rangle$, existuje $c \in \langle a, b\rangle$ takové, že $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$, tj. ***střední hodnota funkce*** f na $\langle a, b\rangle$.

Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ definujme funkci $F\colon \begin{cases} a \to \int_a^a f(x)dx \\ t \to \int_a^t f(x)dx\,, t \in \langle a, b\rangle, \\ b \to \int_a^b f(x)dx \end{cases}$

tj. podle 4 je

$$F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0,\quad F(b) = \int_a^b f(x)dx,\quad F(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Platí:

- Funkce F je spojitá na $\langle a, b\rangle$.
- Derivace $F'(t) = f(t)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Funkci F nazýváme ***primitivní funkcí*** k funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Je-li F primitivní funkce k funkci f na $\langle a, b\rangle$, potom také $F + c$, kde $c \in \mathbf{R}$, je také primitivní funkcí k funkci f na $\langle a, b\rangle$.

Primitivní funkci F k funkci f značíme $F(t) = \int f(t)dt + c$ a nazýváme ji ***neurčitým integrálem***.

Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na $\langle a, b\rangle$, potom platí **Newtonův-Leibnizův vzorec**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

Zkrácený zápis $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Metoda per partes

Mají-li dvě funkce u, v spojité derivace na $\langle a, b\rangle$, derivace jejich součinu je

$$\big(u(x)\cdot v(x)\big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Tudíž $u\,v$ je primitivní funkcí k funkci $u'v + uv'$. Platí

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx.$$

Substituční metoda

Je-li funkce $t = g(x)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$, má tam spojitou nenulovou derivaci a funkce $y = f(t)$ je spojitá na intervalu $\langle g(a), g(b)\rangle$, potom

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

Odtud dostaneme:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{pro } f \text{ sudou} \\ 0, \text{pro } f \text{ lichou} & \end{cases}$$

Nevlastní integrál

Je-li funkce f neomezená na intervalu (a, b), nebo $a, b \in \{-\infty, +\infty\}$, nazýváme $\int_a^b f(x)dx$ nevlastním integrálem.

Je-li F primitivní funkce k funkci f na $(a, b) \subset \mathbf{R}^*$, potom nevlastní integrál

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

konverguje, jsou-li obě limity vlastní a integrál ***diverguje***, jestliže některá z limit diverguje.

Numerický výpočet integrálu

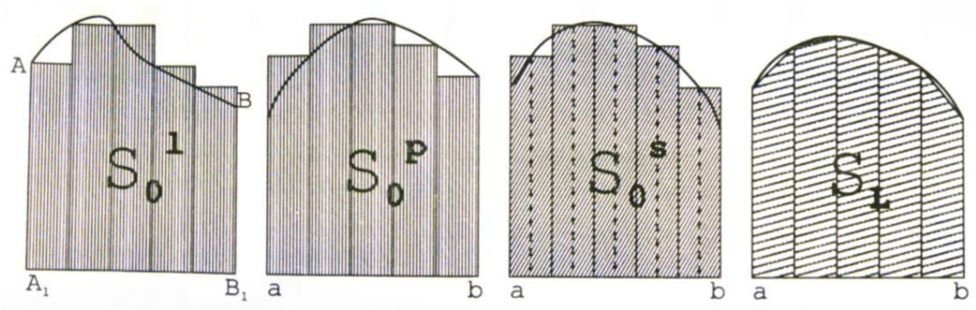
V některých případech je ale výpočet pomocí primitivní funkce složitý a k některým funkcím primitivní funkce vůbec neexistuje. Pak je lepší počítat numericky.

Aproximace rovinného obrazce obdélníky

Princip numerické integrace spočívá v tom, že interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na n dílků a na každém z nich nahradíme funkci f jinou vhodnou funkcí: konstantní, lineární nebo kvadratickou, jejíž integrál umíme spočítat. Označíme

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,\ x_i = a + \frac{i}{n}(b-a),\ h = \frac{b-a}{n}.$$

Zdroj: autor



Newtonovy-Cotesovy kvadraturní vzorce

Obdélníkové pravidlo

Na každém podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ aproximujeme funkci konstantní funkcí

- $S_O^l = h\big(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\big)$ pro levý krajní bod podintervalů,
- $S_O^p = h\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big)$ pro pravý krajní bod podintervalů
- $S_O^s = h\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right)$ pro střed podintervalů.

Lichoběžníkové pravidlo

Na každém podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ aproximujeme funkci lineární funkcí. Úsečka $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ $[x_i, f(x_i)]$ nad intervalem $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ určuje lichoběžník. Jeho obsah je $\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h$. Sečtením všech lichoběžníků dostáváme další vzorec

$$S_L = h\left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right).$$

Simpsonovo pravidlo

Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na sudý počet podintervalů a funkci f aproximujeme kvadratickým polynomem $y = ax^2 + bx + c$. Kartézskou soustavu souřadnic zvolíme tak, aby bod x_1 byl počátek, potom $x_0 = -h, x_1 = 0, x_2 = h$. Funkční hodnoty v těchto bodech jsou

$$f(x_0) = ah^2 - bh + c, f(x_1) = c, f(x_2) = ah^2 + bh + c.$$

Potom $f(x_0) + f(x_2) = 2ah^2 + 2c$ a integrál

$$\int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right]_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) =$$

$$= \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big).$$

Hodnota integrálu závisí pouze na funkčních hodnotách v dělicích bodech, proto výsledný vzorec je

$$S_S = \frac{h}{3}\big(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(b)\big).$$

Je-li funkce f „dostatečně hladká“, dává 3. vzorec nejlepší výsledek. Budeme-li zvětšovat n, bude se zmenšovat chyba vzorců. Zároveň však poroste chyba ze zaokrouhlování čísel.

Příklad. $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$

n	4	10	100	1 000
S_O^s	2.052 34	2.008 25	2.000 08	1.999 98
S_L	1.896 12	1.983 52	1.999 83	1.999 98
S_S	2.004 56	2.000 11	2	1.9999 99

Zdroj: autor

Příklad: $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + x\right) dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2$

n	4	10	100	1 000
S_O^s	1.995 55	1.999 27	1.999 99	2.000 01
S_L	2.008 99	2.001 46	2.000 01	2.000 01
S_S	2.000 42	2.000 01	2	2

Zdroj: autor

Chyba pro jednotlivé vzorce je menší nebo rovna

$$S_O^s \le \frac{h^2}{24}(b-a)M_2,\ S_L \le \frac{h^2}{12}(b-a)M_2,\ S_S \le \frac{h^4}{180}(b-a)M_4,$$

kde M_2, M_4 je maximum 2., 4. derivace f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

6. Numerické řešení obyčejné diferenciální rovnice

Přibližné řešení bude dáno tabulkou hodnot y_i , které ve zvolených bodech x_i aproximují hodnoty přesného řešení $y = y(x)$.

Diferenciální rovnice s počáteční podmínkou:

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0.$$

Eulerova metoda:

Hodnotu y_{n+1} počítáme extrapolací z předchozí hodnoty y_n , jednokroková metoda. Na intervalu $\langle x_n, x_{n+1}\rangle$ aproximujeme integrální křivku její tečnou v bodě $X_n = [x_n, y_n]$, tj.

$$y = f(x_n, y_n)(x - x_n) + y_n$$

a určíme její průsečík přímkou $x = x_{n+1}$.

Rekurentní vzorec, při volbě bodů $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ a počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$, je

$$y_{n+1} = f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + y_n.$$

Pro dosažení přesnosti je třeba použít velmi malý krok $h_n = x_{n+1} - x_n$.

Rekurentní Eulerův vzorec je vlastně Taylorův polynom 1. stupně funkce *y* v bodě x_n pro přírůstek h_n

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + y'(x_n)h_n = y(x_n) + h_n f(x_n, y_n).$$

Metody Rungovy-Kuttovy*:*

Rekurentní vzorec hledáme ve tvaru

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^{m} \propto_i k_i\,, n \geq 0,$$

kde $k_1 = f(x_n, y_n),\ k_i = f(x_n + \beta_i h_n, y_n + \gamma_i h_n k_{i-1}), i > 0.$

Řád 1: Eulerova metoda: $y_{n+1} = y_n + hk_1$.

Řád 2: $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$,
$k_1 = hf(x_n, y_n)$,
$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$

Řád 4: $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$,

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$
$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right),$$
$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right),$$
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)\ .$$

Příklad: Pro rovnici $y' = x^2 + y,\ y(0) = 0$ určíme hodnotu integrální křivky v 0.5 s přesností 10^{-4}.
Analytické obecné řešení lineární rovnice je $y = -(x^2 + 2x + 2) + Ce^x$, potom partikulární řešení s počáteční podmínkou je $y_p = -(x^2 + 2x + 2) + 2e^x$.

1. **Eulerova metoda** s krokem $h = 0.1$: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(x_n^2 + y_n)$

x_i	x_i^2	y_i	$h(x_i^2 + y_i)$	y_{i+1}
0	0	0	0	0
0.1	0.01	0	0.001	0.001
0.2	0.04	0.001	0.004 1	0.005 1
0.3	0.09	0.005 1	0.009 51	0.014 61
0.4	0.16	0.014 61	0.017 461	0.032 071
0.5		0.032 071		

Zdroj: autor

2. ***Metoda Rungova-Kuttova*** řádu 2:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$
$$k_1 = hf(x_n, y_n) = h({x_n}^2 + y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) = h({x_{n+1}}^2 + y_n + k_1)$$

x_i	x_i^2	y_i	k_1	k_2	$(k_1 + k_2)/2$	y_{i+1}
0	0	0	0	0.001	0.000 5	0.000 5
0.1	0.01	0.000 5	0.001 05	0.004 155	0.002 602 5	0.003 102 5
0.2	0.04	0.003 102 5	0.004 310 25	0.009 741 275	0.007 025 76	0.010 128 3
0.3	0.09	0.010 128 3	0.010 012 83	0.018 014 113	0.014 013 48	0.024 141 8
0.4	0.16	0.024 141 8	0.018 414 18	0.029 255 598	0.023 834 89	0.047 976 7
0.5	0.25	0.047 976 7				

Zdroj: autor

3. Metoda postupných aproximací:

Diferenciální rovnice s počáteční podmínkou:

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0,$$

kde f spojitá a $\partial f/\partial y$ spojité v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Pro každé $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ je

$$\int_{x_0}^{x} y'(x)dx = \int_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big)dx$$

Řešení rovnice je funkce $y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big)dx$. Odtud dostáváme rekurentní vzorec pro posloupnost řešení

$$y_0 = y(x_0), y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y_n(x)\big)dx\,, n \geq 0$$

Příklad. $y' = x^2 + y,\ y(0) = 0 = y_0$ a hodnotu integrální křivky v bodě 0.5.

$y_1(x) = \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3}x^3, y_1(0.5) \doteq 0.041\,\overline{6}$,
$y_2(x) = \int_0^x \left(x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4, y_2(0.5) \doteq 0.046\,874\,\overline{9}$,
$y_3(x) = \int_0^x \left(x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}x^5, y_3(0.5) \doteq 0.047\,395\,832$,
$y_4(x) = \int_0^x \left(x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{360}x^6,$
$y_4(0.5) \doteq 0.047\,439\,234, |y_4 - y_3| \doteq 0.000\,043\,402$

Odtud odhadneme n-tý člen je $y_n = 2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$. Jeho limita pro $n \to +\infty$ je $y_p = 2\mathrm{e}^x - (x^2 + 2x + 2), y_p(0.5) = 0.047\,442\,541$.

7. Stabilita řešení diferenciální rovnice

Soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, \cdots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{aligned} \qquad (5)$$

s počátečními podmínkami $y_1(a) = b_1, \cdots, y_n(a) = b_n$. Její řešení

$$y_i = \varphi_i(x), i = 1, \cdots, n \tag{6}$$

je ***stabilní*** (ljapunovsky), právě když $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0$ takové, že pro každé řešení $Y_i(x)$, jehož počáteční podmínky splňují nerovnost $|Y_i(a) - \varphi_i(a)| < \delta, i = 1, \cdots, n,$ je $|Y_i(x) - \varphi_i(x)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n$, pro každé $x \geq a$.

Pokud pro jedno řešení tato nerovnost neplatí, pak řešení φ_i je nestabilní.

Řešení (6) je ***asymptoticky stabilní***, existuje-li $\vartheta > 0$ takové, že

$$\lim_{x \to +\infty} |Y_i(x) - \varphi_i(x)| = 0,$$

jestliže $|Y_i(a) - \varphi_i(a)| < \vartheta$.

Příklad. $y' = -a^2 y, a \neq 0, P.P. y(x_0) = y_0$. Řešení: $y = y_0 \mathrm{e}^{-a^2(x-x_0)}$ bude asymptoticky stabilní, jestliže

$$\left| y_0 \mathrm{e}^{-a^2(x-x_0)} - Y_0 \mathrm{e}^{-a^2(x-x_0)} \right| = \mathrm{e}^{-a^2(x-x_0)} |y_0 - Y_0| < \varepsilon$$

limita je 0.

Stacionární body řešení

Jednoduchý případ, kdy integrální křivky jsou definované v okolí počátku. Soustava

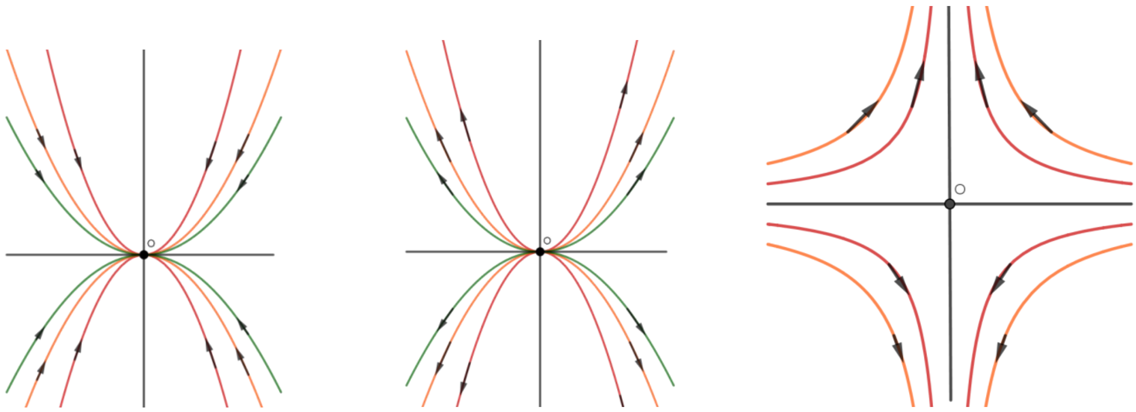
$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

má řešení: $\mathbf{y} = \mathrm{e}^{kx}(\propto_1, \propto_2)$, potom charakteristická rovnice soustavy je

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = k^2 - (a_{11} + a_{22})k + |A| = 0.$$

Pro $k_1 \neq k_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{y} = c_1 \mathrm{e}^{k_1 x}(\propto_1, \propto_2) + c_2 \mathrm{e}^{k_2 x}(\beta_1, \beta_2)$.

Bod [0,0] je asymptoticky stabilní – uzel, pro $k_1 < 0,\ k_2 < 0$, nestabilní – uzel, pro $k_1 > 0,\ k_2 > 0$. Bod O je sedlo pro $k_1\, k_2 < 0$.



Stabilní uzel nestabilní uzel sedlo

Zdroj: autor

Řešení soustavy lineárních homogenních rovnic

$$y'_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n\,, i = 1, \cdots, n, a_{ik} \in \mathbf{C} \qquad (7)$$

je asymptoticky stabilní, jestliže všechny kořeny charakteristické rovnice matice soustavy $|A - \lambda E| = 0$ mají zápornou reálnou část. Tu nám určí Hurwitzovo kritérium.

Hurwitzův polynom

Polynom $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, n \geq 1, a_0 > 0, a_n \neq 0$, je hurwitzovský polynom, jestliže každý jeho kořen má zápornou reálnou část.

Hurwitzovo kritérium

Polynom je hurwitzův, právě když všechny hlavní subdeterminanty hurwitzovy matice jsou kladné, tj. matice

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

tj. $a_s = 0$ pro $s < 0, s > n$.

Soustava s „malými poruchami“

$$y'_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n\psi_i(x, y_1, \cdots, y_n).$$

Platí:

1. $x \geq a, |y_i| < K, i = 1, \cdots, n, K\ je\ konstanta$, potom ψ_i jsou spojité a $|\psi_i(x, y_1, \cdots, y_n)| \leq L(|y_1| + \cdots + |y_n|)$, L je konstanta, $\psi_i(x, 0, \cdots, 0) = 0 \Rightarrow y_i = 0$ je řešením soustavy (7).

2. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon, T_\varepsilon$ takové, že pro $|y_i| < \delta_\varepsilon, x \geq T_\varepsilon$ je $|\psi_i(x, y_1, \cdots, y_n)| \leq \varepsilon(|y_1| + \cdots + |y_n|)$

3. Každé řešení charakteristické rovnice matice soustavy má (7) zápornou reálnou část.

8. Taylorův polynom

Aproximujeme funkci *f*, která má spojité derivace do řádu $n + 1$ v okolí bodu *c* polynomem n-tého stupně

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \cdots + a_n(x - c)^n,$$

tak, aby v bodě *c* měl stejné derivace, až do řádu *n*, jako daná funkce *f*.

$$T'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - c) + 3a_3(x - c)^2 + \cdots + na_n(x - c)^{n-1},$$

$$T''_n(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - c) + 4 \cdot 3(x - c)^2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - c)^{n-2},$$

. . . .

$$T_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdots 2a_n = n!\ a_n.$$

Z podmínky rovnosti derivací polynomu a funkce dostáváme koeficienty polynomu T_n

$$a_0 = f(c), a_1 = f'(c), a_2 = \frac{1}{2} f''(c), \cdots, a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c).$$

Získaný polynom

$$T_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2} f''(c)(x - c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x - c)^n$$

se nazývá ***Taylorův polynom n-tého stupně funkce f v bodě c.***

Pro chybu $R_{n+1}(x)$ aproximace funkce *f* Taylorovým polynomem v okolí bodu *c* platí např. Lagrangeův vzorec

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\tau)(x-c)^{n+1},$$

kde τ je z okolí bodu *c*.

První aproximace, některých funkcí v okolí nuly, používané v technických aplikacích:

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + x\,, \ln(1+x) \approx x, \quad \ln(1-x) \approx -x\,, \ \sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x\,.$$

Příklad. ***Cobb-Douglasova produkční funkce***: $Y = AK^{\propto}N^{\beta}$, (*A* je úrovňová konstanta, α, β konstantní parametry). Rovnici zlogaritmujeme

$$\ln Y = \ln A + \propto \ln K + \beta \ln N$$

a logaritmy pro malé hodnoty aproximujeme (lineární funkcí proměnných *k,n*)

$$y = \kappa + ak + bn.$$

Příklad. ***Cena dluhopisu*** $P(i)$ při změně úrokové míry *i* o hodnotu Δi. Taylorův polynom funkce *P* v bodě *i* je

$$P(i + \Delta i) = P(i) + P'(i)\,\Delta i + \frac{1}{2}P''(i)(\Delta i)^2 + \cdots$$

Vzhledem k malé změně úrokové sazby, členy s vyšší mocninou zanedbáme a vyjádříme střední dobu splatnosti

$$\frac{P(i+\Delta i) - P(i)}{P(i)} = \frac{P'(i)}{P(i)}\Delta i = -D_{MM}\Delta i\,,$$

D_{MM} je modifikovaná Macalayova durace.

Příklad. Pomocí Taylorovy řady aproximovat primitivní funkci:

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2} dx \approx \int_0^x \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!}\right) dx$$

$$\approx \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{4!9} - \frac{x^{11}}{5!11}\right) + \frac{x^{13}}{6!13}\,.$$

Pro $x = 1$ zaokrouhlit hodnotu Laplaceova integrálu na 3 desetinná místa:

$$\frac{1}{42} = 0{,}023\,80\ldots, \ \frac{1}{4!\,9} = 0{,}004\,62\ldots, \ \frac{1}{5!\,11} = 0{,}000\,75\ldots, \ \frac{1}{6!\,13} = 0{,}000\,04$$

Zaokrouhlovací chyby se sčítají, je třeba zaokrouhlovat na 4 místa:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx \approx 1 - 0{,}333\,3 + 0{,}1 - 0{,}023\,8 + 0{,}004\,6 - 0{,}000\,8 \approx 0{,}747.$$

9. Fourierovy polynomy a řady

Po částech spojitou periodickou funkci f na $\mathbf{R}$ aproximujeme trigonometrickým polynomem nebo Fourierovou trigonometrickou řadou. Několik základních pojmů na úvod.

Skalární součin a norma funkce

F je množina funkcí, které na intervalu $\langle a, b\rangle$ tvoří s operacemi sčítání funkcí a násobení funkce číslem, vektorový prostor. Existují-li ke každé funkci $f \in \mathbf{F}$ Riemannovy integrály

$$\int_a^b f(x)dx\,, \int_a^b f^2\,(x)dx,$$

definujeme ***skalární součin*** a ***normu*** funkce na **F**

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \qquad \|f(x)\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Ortogonální systém funkcí

Posloupnost funkcí $F = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ z prostoru **F** tvoří ortogonální skupinu funkcí, jestliže platí:

1. Všechny funkce systému *F* jsou definované na $\langle a, b\rangle$.
2. Každé dvě funkce z *F* jsou ortogonální, tj. $\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = 0, i \neq j$.
3. Existuje-li funkce $f \in \mathbf{F}$ taková, že $(\varphi_i, f) = 0$ pro $i = 0,1,2,\cdots$, potom $\|f(x)\| = 0$, tj. systém funkcí již nelze doplnit, je maximální.

Aproximace funkce polynomem

Každou funkci $f \in \mathbf{F}$ můžeme aproximovat polynomem

$$F_n(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x),$$

nebo konvergentní řadou

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \varphi_i(x)\text{, kde } a_i = \frac{(f,\varphi_i)}{(\varphi_i,\varphi_i)}.$$

Pro chybu aproximace polynomem $F_n(x)$ je

$$|R_{n+1}(x)|^2 = \|f(x) - F_n(x)\|^2 \leq \|f(x)\|^2 - \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \|\varphi_i(x)\|^2.$$

Fourierova trigonometrická řada

Posloupnost $\mathbf{F}_\varphi = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ určuje ortogonální systém funkcí na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, funkce jsou periodické se společnou periodou $T = 2\pi$. Trigonometrický polynom stupně *n* má tvar

$$F_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Trigonometrická řada

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

se nazývá Fourierova trigonometrická řada s koeficienty (Fourierovy) vzhledem k ortogonálnímu systému $\mathbf{F}_\varphi$ jsou

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, k > 1,$$

$$b_0 = 0, b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, k > 1.$$

Je-li periodická funkce f definovaná a omezená na $\mathbf{R}$, potom její Fourierova řada konverguje a má součet $S = \frac{1}{2}(\lim_{t \to x-} f(t) + \lim_{t \to x+} f(t))$.

Pro chybu aproximace platí

$$|R_{n+1}|^2 \leq \|f(x)\|^2 - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Periodické rozšíření funkcí

Je-li funkce f definovaná na $\langle -\pi, \pi \rangle$,

- lze funkci f periodicky prodloužit na celé **R** tak, že $f(x+2k\pi) = f(x)$ pro každé $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ a každé k celé, tj. ***přímé periodické prodloužení***,
- k funkci f lze sestrojit sudou funkci tak, že pro $x \in \langle -\pi, 0 \rangle$ položíme $f(x) = f(-x)$, tj. ***sudé periodické prodloužení***,
- k funkci f lze sestrojit lichou funkci tak, že pro $x \in \langle -\pi, 0 \rangle$ položíme $f(x) = -f(-x)$, tj. ***liché periodické prodloužení***.

Fourierova analýza – diskrétní případ

Funkce f je dána tabulkou hodnot, $x_0 = 0, x_1 = \frac{2\pi}{m+1}, x_2 = \frac{4\pi}{m+1}, x_3 = \frac{6\pi}{m+1}, \cdots$, potom interpolační trigonometrický polynom funkce f je

$$\sum_{k=0}^{L} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) + \frac{1}{2}\theta A_{L+1} \cos(L+1)x, \quad \sum_{k=0}^{m} C_k \mathrm{e}^{ikx},$$

kde pro m sudé je $\theta = 0, L = \frac{m}{2}$, pro m liché je $\theta = 1, L = \frac{m-1}{2}$ a

$$A_0 = \frac{1}{m+1}\sum_{s=0}^{m} f(x_s), \quad A_k = \frac{2}{m+1}\sum_{s=0}^{m} f(x_s)\cos kx_s, \qquad k = 1,2,\cdots,L+1,$$

$$B_0 = 0, B_k = \frac{2}{m+1}\sum_{s=0}^{m} f(x_s)\sin kx_s, k = 1,2,\cdots,L+1,$$

10. Reálná funkce dvou reálných proměnných

Funkce dvou proměnných je každé zobrazení f množiny $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^2$ do množiny **R**.

Uspořádané dvojici $[x,y] \in \mathbf{M}$ je přiřazeno nejvýše jedno $z \in \mathbf{R}$, které značíme $z = f(x,y)$.

Množina $\mathbf{D}_f = \{[x,y] \in \mathbf{M},\ z = f(x,y)\}$ je **definiční obor** funkce *f*.

Množina $\mathbf{H}_f = \{z \in \mathbf{R}, z = f(x,y),\ [x,y] \in \mathbf{D}_f\}$ je **obor hodnot** funkce ***f*.**

Množina všech bodů $[x, y, f(x,y)]$ z prostoru $\boldsymbol{R}^3$, kde $[x,y] \in \mathbf{D}_f$, je **graf** funkce f.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Množina bodů $[x, y] \in \mathbf{D}_f$, pro které je $f(x, y) = c$, kde $c \in \mathbf{H}_f$, je **vrstevnice** funkce f.

Je-li f funkce užitku, nazývá se vrstevnice **indiferenční křivka**.

Je-li f produkční funkce, nazývá se vrstevnice **izokvanta**.

Lineární funkce

$f: z = ax + by + c$, $\mathbf{D}_f = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{H}_f = \mathbf{R}$, graf je rovina nebo její část.

Kvadratická funkce

$\mathrm{f}: \mathrm{z} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{by}^2 + \mathrm{cx} + \mathrm{dy} + \mathrm{exy} + \mathrm{g}$, *kde aspoň jedno z čísel a,b,e je různé od nuly.*

Limita a spojitost funkce

Okolí bodu $\mathrm{A}[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \in \mathbf{R}^2$ *o poloměru* $\mathrm{r} > 0$ *je množina* $\mathbf{U}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{X} \in \mathbf{R}^2, |\mathrm{AX}| < \mathrm{r}\}$, *tj. kruh o středu A a poloměru r bez hraniční kružnice.*

Bod $\mathrm{A}[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \in \mathbf{M}$ *je* ***hromadným bodem*** *množiny* $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^2$, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny $\mathbf{M}$.

Funkce f má limitu $\alpha \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ v bodě $\mathrm{A} \in \mathbf{R}^2$, který je hromadným bodem množiny $\mathbf{D}_f$, jestliže ke každému okolí $\mathbf{U}(\alpha)$ existuje prstencové okolí $\mathbf{U}'(\mathrm{A}) = \mathbf{U}(\mathrm{A}) - \{\mathrm{A}\}$ takové, že pro každé $\mathrm{X} \in \mathbf{U}'(\mathrm{A}) \cap \mathbf{D}_f$ je $f(X) \in \mathbf{U}(\alpha)$. Píšeme

$$\lim_{\mathrm{X} \to \mathrm{A}} \mathrm{f}(\mathrm{X}) = \alpha\,.$$

Funkce f je spojitá *v bodě $A \in \mathbf{D}_f$*, jestliže

$$\lim_{\mathrm{X} \to \mathrm{A}} \mathrm{f}(\mathrm{X}) = \mathrm{f}(\mathrm{A})\,.$$

Parciální derivace funkce

Funkce $\mathrm{z} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ je definovaná v okolí $\mathbf{U}(\mathrm{A})$.

Množina bodů $[\mathrm{x}, \mathrm{b}] \in \mathbf{U}(\mathrm{A})$ určuje funkci $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{b})$ jedné proměnné. Derivaci funkce g v bodě a

$$\mathrm{g}'(\mathrm{a}) = \lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{\mathrm{g}(\mathrm{a} + \mathrm{h}) - \mathrm{g}(\mathrm{a})}{\mathrm{h}} = \lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{a} + \mathrm{h}, \mathrm{b}) - \mathrm{f}(\mathrm{a}, \mathrm{b})}{\mathrm{h}}$$

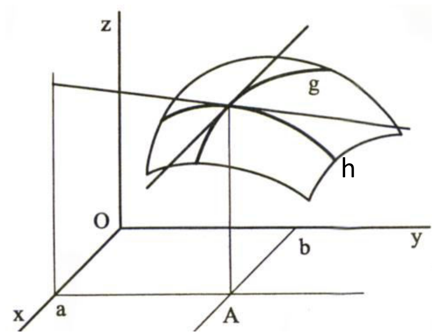
říkáme **parciální derivace funkce f v bodě A podle proměnné x.**

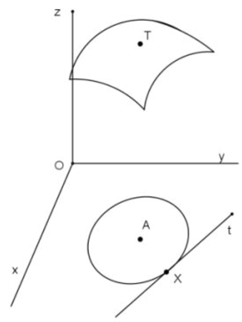
Množina bodů $[\mathrm{a}, \mathrm{y}] \in \mathbf{U}(\mathrm{A})$ určuje funkci $\mathrm{h}(\mathrm{y}) = \mathrm{f}(\mathrm{a}, \mathrm{y})$ jedné proměnné. Derivaci funkce h v bodě b

$$h'(b) = \lim_{k \to 0} \frac{h(b+k) - h(b)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a,b)}{k}$$

říkáme **parciální derivace funkce f v bodě A podle proměnné y.**

Značíme je $\frac{\partial f(A)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(A)}{\partial y}$, nebo krátce $f_x(A), f_y(A)$.





Zdroj: autor

Parciální derivace užitkové funkce jsou funkcemi mezní míry užitku vzhledem k jednotlivým proměnným.

Rovnice tečny vrstevnice v jejím bodě $X_0[x_0, y_0]$ je

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(X)}{\partial y}(y - y_0) = 0.$$

Směrnice této tečny $-\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y}$ je **mezní míra substituce** (ve spotřebě) x za y. Pak indiferenční křivka je klesající.

Vektor kolmý na vrstevnici

$$\operatorname{grad} f(X) = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x}, \frac{\partial f(X)}{\partial y} \right)$$

se nazývá **gradient funkce** f v bodě X.

Normálový vektor grafu funkce $f: z = f(x, y)$ v bodě $T[a, b. f(a, b)]$ je vektor $\mathbf{n} = \left(f_x(a, b), f_y(a, b), -1\right)$.

Rovnice tečné roviny grafu funkce f v bodě $T[a, b, f(a, b)], A[a, b]$ je

$$f_x(A)(x-a)+f_y(A)(y-b)-\big(z-f(A)\big)=0.$$

Derivace složené funkce

Nechť funkce $f\colon z=f(x,y)$, kde $x=\varphi(t), y=\omega(t)$ a $\mathbf{D}_\varphi=\mathbf{D}_\omega, \mathbf{H}_\varphi\times\mathbf{H}_\omega\subset\mathbf{D}_f$, potom

$$F(t)=f\big(\varphi(t),\omega(t)\big)$$

je složená funkce proměnné t. Derivace funkce F v bodě $t_0\in\mathbf{D}_\varphi$ je limita

$$F'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f\big(\varphi(t),\omega(t)\big)-f\big(\varphi(t_0),\omega(t_0)\big)}{t-t_0}.$$

Zlomek upravíme

$$F'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f\big(\varphi(t),\omega(t_0)\big)-f\big(\varphi(t_0),\omega(t_0)\big)}{t-t_0}+\lim_{t\to t_0}\frac{f\big(\varphi(t),\omega(t)\big)-f\big(\varphi(t),\omega(t_0)\big)}{t-t_0}$$

$$F'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f\big(\varphi(t),\omega(t_0)\big)-f\big(\varphi(t_0),\omega(t_0)\big)}{\varphi(t)-\varphi(t_0)}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}+$$

$$+\lim_{t\to t_0}\frac{f\big(\varphi(t),\omega(t)\big)-f\big(\varphi(t),\omega(t_0)\big)}{\omega(t)-\omega(t_0)}\frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{t-t_0}.$$

Odtud **derivace složené funkce** F podle proměnné t v bodě t_0 je

$$F'(t_0)=\frac{\partial f(A)}{\partial x}\cdot\varphi'(t_0)+\frac{\partial f(A)}{\partial y}\cdot\omega'(t_0),$$

kde $A=[\varphi(t_0),\omega(t_0)]$. Analogický vzorec platí pro funkce dvou proměnných.

Derivace funkce podle jednotkového vektoru (ve směru jednotkového vektoru)

Vzorec pro derivaci složené funkce zapíšeme pomocí skalárního součinu gradientu a tečného vektoru **t** křivky $x=\varphi(t), y=\omega(t)$ z $\mathbf{D}_f$

$$F'(t_0)=\Big(f_x(A),f_y(A)\Big)\cdot\big(\varphi'(t_0),\omega'(t_0)\big)=\operatorname{grad} f(A)\cdot\mathbf{t}\,.$$

Zvolíme-li jednotkový vektor $\mathbf{e}=\frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|}$, nazveme derivaci

$$\frac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}\,\mathbf{e}}=\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad} f(A)$$

derivací funkce f v bodě A podle vektoru e.

Přepíšeme-li skalární součin napravo

$$\frac{\mathrm{df(A)}}{\mathrm{d}\,\mathbf{e}} = |\mathbf{e}||\mathrm{grad\ f(A)}|\cos\propto = |\mathrm{grad\ f(A)}|\cos\propto,$$

je **derivace extremální** pro úhly 0 a π, tj. ve směru jednotkového gradientu

$\mathbf{e} = \mathrm{grad\ f(A)}/|\mathrm{grad\ f(A)}|$, tj. **ve směru kolmém na vrstevnici**.

Diferencovatelná funkce a totální diferenciál

Funkce f je v bodě $A[a,b]$ diferencovatelná, jestliže existuje okolí $\mathbf{U}(A) \subset \mathbf{D}_f$, ve kterém lze přírůstek funkce f vyjádřit ve tvaru

$$f(X) - f(A) = K_1(x-a) + K_2(y-b) + \omega_1(X)(x-a) + \omega_2(X)(y-b),$$

kde $K_1, K_2 \in \mathbf{R}$ a funkce ω_1, ω_2 jsou v bodě A spojité a nulové. Potom i funkce f je v bodě A spojitá. Pro $y = b$, resp. $x = a$, je

$$\frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} = K_1 + \omega_1(x,b), \text{resp. } \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b} = K_2 + \omega_2(a,y).$$

Limitním přechodem dostaneme

$$\mathrm{K}_1 = \frac{\partial \mathrm{f(A)}}{\partial \mathrm{x}}, \qquad \mathrm{K}_2 = \frac{\partial \mathrm{f(A)}}{\partial \mathrm{y}}.$$

Nutná podmínka *diferencovatelnosti funkce:*

Je-li funkce f v bodě A diferencovatelná, potom má v bodě A parciální derivace.

Lineární funkce

$$\mathrm{d_A f(x,y)} = \frac{\partial \mathrm{f(A)}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x-a}) + \frac{\partial \mathrm{f(A)}}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{y-b})$$

se nazývá **totální diferenciál funkce** f v bodě A.

Postačující podmínka diferencovatelnosti funkce je spojitost jejích parciálních derivací.

Přírůstek funkce f v bodě A můžeme aproximovat jejím totálním diferenciálem

$$\mathrm{f(X) - f(A)} \doteq \mathrm{d_A f(x,y)}.$$

Parciální derivace 2. řádu funkce dvou proměnných

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Má-li funkce $\mathrm{z} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ parciální derivace $\mathrm{f_x}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}}$, $\mathrm{f_y}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}}$ v každém bodě X nějakého intervalu $\mathbf{M} \subset \mathbf{D}_\mathrm{f}$, jsou parciální derivace funkcemi proměnných x, y. Existují-li parciální derivace funkcí $\mathrm{f_x}, \mathrm{f_y}$ v bodě $\mathrm{A} \in \mathbf{M}$, píšeme

$$\mathrm{f_{xx}}(\mathrm{A}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{A}) = \frac{\partial^2 \mathrm{f}(\mathrm{A})}{\partial \mathrm{x}^2},\ \mathrm{f_{yx}}(\mathrm{A}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{A}) = \frac{\partial^2 \mathrm{f}(\mathrm{A})}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}},$$

$$\mathrm{f_{xy}}(\mathrm{A}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{A}) = \frac{\partial^2 \mathrm{f}(\mathrm{A})}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}},\ \mathrm{f_{yy}}(\mathrm{A}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{A}) = \frac{\partial^2 \mathrm{f}(\mathrm{A})}{\partial \mathrm{y}^2}.$$

Derivace $\mathrm{f_{xy}}$, $\mathrm{f_{yx}}$ se nazývají **smíšené parciální derivace 2. řádu.** Má-li funkce f v okolí bodu A diferencovatelné parciální derivace, potom smíšené parciální derivace v bodě A jsou stejné.

Diferenciály vyšších řádů

Funkce *f* má v bodě *A* spojité parciální derivace do řádu *n.* Vektor přírůstků nezávisle proměnné označíme $\mathbf{h} = (h_1, h_2) = (x - a, y - b)$, úsečka *AX* má vyjádření: $x = a + th_1$, $y = b + th_2,\ t \in \langle 0,1 \rangle$. Složená funkce $F(t) = f(a + th_1, b + th_2)$ definovaná v bodech úsečky *AX,* má derivaci

$$F'(t) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} h_2.$$

Druhá derivace funkce *F* je

$$F''(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(X)}{\partial y} h_2\right) h_1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(X)}{\partial y} h_2\right) h_2.$$

Druhou derivaci funkce *F* v bodě $t = 0$, kterou označíme

$$d^2 f_A(\mathbf{h}) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} h_2^2,$$

nazýváme **totální diferenciál 2. řádu** funkce *f* v bodě *A*. Je kvadratickou funkcí proměnné **h.**

Pro $f_{xx} \neq 0$ kvadratickou funkci upravíme

$$d^2 f_A(\mathbf{h}) = f_{xx}\left(h_1 + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} h_2\right)^2 + \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}} h_2^2,$$

potom jestliže

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

1. $d^2 f_A(\mathbf{h}) > 0$ pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$, a to právě když $f_{xx} > 0$, $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$, nazýváme $d^2 f_A(\mathbf{h})$ **pozitivně definitní**,
2. $d^2 f_A(\mathbf{h}) < 0$ pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$, a to právě když $f_{xx} < 0$, $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$, nazýváme $d^2 f_A(\mathbf{h})$ **negativně definitní**,
3. existuje $\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$ takové, že $d^2 f_A(\mathbf{h}) > 0$ a existuje $\mathbf{h}' \neq \mathbf{o}$ takové, že $d^2 f_A(\mathbf{h}') < 0$, tj. právě když $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} < 0$, nazýváme $d^2 f_A(\mathbf{h})$ **indefinitní**.

Taylorův polynom 2. stupně

Má-li funkce F, jedné proměnné t, derivace do řádu $n + 1$ na $\langle 0,1 \rangle$, můžeme ji vyjádřit Taylorovým polynomem

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)\,t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)\,t^n + R_n(t),$$

kde R_n je zbytek, např. v Lagrangeově tvaru

$$R_n(t) = \frac{F^{(n+1)}(\delta t)}{(n+1)!}t^{n+1}, \delta \in (0,1).$$

Funkce f je v bodě $A[a, b]$ diferencovatelná a v $\mathbf{U}(A)$ má spojité parciální derivace do 3. řádu. Definujme složenou funkci $F(t) = f\big(a + t(x - a), b + t(y - b)\big) = f(A + t\,\mathbf{h})$, je $F(1) = f(x, y)$. Potom

$$f(A + \mathbf{h}) = f(A) + df_A(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}d^2 f_A(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{h})$$

a kvadratický polynom

$$T_2(\mathbf{h}) = f(A) + df_A(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}d^2 f_A(\mathbf{h})$$

je **Taylorův polynom 2. stupně** funkce f v bodě A, k vyjádření zbytku pro $C \in \mathbf{U}(A)$ použijeme 3. diferenciál

$$R_2(\mathbf{h}) = \frac{1}{3!}d^3 f_C(\mathbf{h}).$$

Lokální extrémy funkce dvou proměnných

Funkce f má v bodě $A \in \mathbf{D}_f$ lokální minimum $f(A)$, jestliže existuje okolí $\mathbf{U}(A) \in \mathbf{D}_f$ takové, že pro každé $X \in \mathbf{U}(A)$ je $f(X) \geq f(A)$.

Funkce f má v bodě $A \in \mathbf{D}_f$ lokální maximum $f(A)$, jestliže existuje okolí $\mathbf{U}(A) \in \mathbf{D}_f$ takové, že pro každé $X \in \mathbf{U}(A)$ je $f(X) \leq f(A)$.

Funkce f **může mít lokální extrém** v bodě $A \in D_f$, ve kterém její paciální derivace jsou rovny nule, nebo neexistují.

Postačující podmínka pro existenci lokálního extrému:

Funkce f má spojité parciální derivace 1. a 2. řádu v bodě $A \in \mathbf{D}_f$ a grad $f(A) = \mathbf{o}$, potom

$$f(X) = f(A) + \frac{1}{2} d^2 f_A(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{h}).$$

Odtud: funkce f má v bodě A

1. **lokální maximum**, jestliže $d^2 f_A(\mathbf{h})$ je **negativně definitní**,
2. **lokální minimum**, jestliže $d^2 f_A(\mathbf{h})$ je **pozitivně definitní**.
3. Funkce f **nemá lokální extrém** v bodě A, je-li $d^2 f_A(\mathbf{h})$ **indefinitní.**

Vázané extrémy – Lagrangeova funkce

Extrémy funkce f na množině $\mathbf{M} = \{[x, y] \in \mathbf{D}_f, g(x, y) = 0\}$ se nazývají vázané extrémy funkce f. Funkce g je **vazba**.

Funkce f má v bodě A vázaný extrém na množině **M**, jestliže existuje λ , pro které má funkce

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$$

v bodě A lokální extrém.

Absolutní extrémy funkce

Je-li funkce f spojitá na uzavřené a omezené množině **M**, existují body $A, B \in \mathbf{M}$, ve kterých funkce f nabývá svého maxima a minima.

11. Parciální diferenciální rovnice, metoda sítí

Parciální diferenciální rovnice 1. řádu

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

je rovnice pro funkci $z = z(x, y)$ nezávisle proměnných *x, y*. Graf funkce *z* je plocha.

Řešení rovnice:

- Cauchyův problém: řešení s počáteční podmínkou
- Dirichletův problém: řešení s okrajovými podmínkami
- Neumannův problém: spojité řešení se spojitými 1.derivacemi a danými hodnotami na hranici množiny.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R,$$

kde *P, Q, R* jsou funkce proměnných *x, y, z.*

Je-li funkce *z* daná implicitní rovnicí $F(x, y, z) = 0$, potom její parciální derivace jsou

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

a po dosazení do diferenciální rovnice je

$$P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} + R\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Porovnáním s totálním diferenciálem funkce *F*

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

dostaneme soustavu (tří) obyčejných diferenciálních rovnic v kanonickém tvaru

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Příklad 1.

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| - \ln C_1 \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1, \quad C_1 \neq 0$$

$$dz = 0 \Rightarrow z = C_2$$

Obecný integrál rovnice je funkcí poměru $\frac{y}{x}$, tj. $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Příklad 2.

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = xy \Rightarrow \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}.$$

Z 1. rovnice podle předchozího příkladu: $\frac{y}{x} = C_1$.

Sečtením zbývajících 2 rovnic: $\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}$ a $\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{xy}$ dostáváme exaktní diferenciální rovnici $ydx + xdy - 2zdz = 0$. Její řešení je funkce daná implicitní rovnicí $xy - z^2 = c_2$. Obecný integrál dané rovnice je $z^2 = xy + f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Parciální diferenciální rovnice 2. řádu

$$F\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}\right) = 0.$$

Lineární rovnice 2. ř. pro funkci $z = z(x, y)$:

$$A_{11}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2A_{12}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A_{22}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + B_1\frac{\partial z}{\partial x} + B_2\frac{\partial z}{\partial y} + Cz + D = 0,$$

A_{ij}, B_k, C, D jsou spojité fce x, y.

$\left\{\begin{matrix} A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 > 0 \\ A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 < 0 \\ A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 = 0 \end{matrix}\right\}$, potom se rovnice nazývá $\left\{\begin{matrix} \text{eliptická} \\ \text{hyperbolická} \\ \text{parabolická} \end{matrix}\right\}$ na $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^2$.

***Kanonický tvar rovnice*:**

Eliptická a hyperbolická rovnice:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_1\frac{\partial z}{\partial x} + a_2\frac{\partial z}{\partial y} + cz + d = 0$$

Parabolická rovnice:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y} + cz + d = 0$$

Eliptická rovnice

- Laplaceova: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$
- Poisonova: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$

Hyperbolická rovnice

- Vlnová rovnice: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
- Kmitání struny**:** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Parabolická rovnice

- Rovnice vedení tepla: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(x, y, z, t)$
- Black–Scholesova rovnice: $\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$

Numerické řešení parciální diferenciální rovnice

Diferenciální rovnici převádíme na soustavu lineárních algebraických rovnic – síťové rovnice - tak, že derivace v nich obsažené nahradíme diferencemi:

- Diference vpřed: $f'(x) \doteq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,
- Diference vzad: $f'(x) \doteq \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$,
- Centrální diference: $f'(x) \doteq \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$,
- 2.centrální diference: $f''(x) \doteq \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$.

Metoda sítí pro obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu

Okrajová úloha pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2.ř.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), y(a) = t_0, y(b) = t_1$$

Označíme: $h = \frac{1}{n}(b-a), x_i = x_0 + ih, i = 0, \cdots, n.$

$p_i = p(x_i),\ q_i = q(x_i),\ \ f_i = f(x_i), i = 1, \cdots, n-1.$

$y_0 = t_0, y_n = t_n.$

Dosazením diferencí – síťová rovnice:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i$$

Soustava $n-1$ rovnic pro $n+1$ neznámých $y_0, \cdots, y_n$. Po úpravě

$$(2 - hp_i)y_{i-1} + (2q_i h^2 - 4)y_i + (2 + hp_i)y_{i+1} = 2f_i h^2,$$

kde označíme pro

$i = 1$ $\qquad B_1 y_1 + C_1 y_2 = D_1,$

$i = 2, \cdots, n-2$ $\qquad A_i y_{i-1} + B_i y_i + C_i y_{i+1} = D_i,$

$i = n-1$ $\qquad A_{n-2} y_{n-2} + B_{n-1} y_{n-1} = D_{n-1},$

Tj. pro

$i = 1$ $\qquad A_1 = 0,$

$i = 2, \cdots, n-1$ $\qquad A_i = 2 - hp_i$

$i = 1, \cdots, n-1$ $\qquad B_i = 2q_i h^2 - 4$

$i = 1, \cdots, n-2$ $\qquad C_i = 2 + hp_i$

$i = n-1$ $\qquad C_{n-1} = 0$

$i = 1$ $\qquad D_1 = 2f_1 h^2 - t_0(2 - hp_1)$

$i = 2, \cdots, n-2$ $\qquad D_i = 2h^2 f_i$

$i = n-1$ $\qquad D_{n-1} = 2f_{n-1}h^2 - t_1(2 + hp_{n-1}).$

Matice soustavy je třídiagonální

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n-2} & B_{n-2} & C_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-1} & B_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix}$$

Black–Scholesova rovnice

je parabolická parciální diferenciální rovnice 2. řádu

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

f je cena opce, funkce cen akcií S v čase t, r je bezriziková úroková sazba, σ je volatilita akcií.

Okrajové podmínky:

Pro evropskou call opci (kupní právo):

$f(S,T) = \max_S\{S-K,0\}$, $f(0,t) = 0$, $f(S_{max},t) = S_{max} - Ke^{-r(T-t)}$

Pro evropskou put opci (prodejní právo):

$f(S,T) = \max_S\{K-S,0\}$, $f(S_{max},t) = 0$, $f(0,t) = S_{max} - Ke^{-r(T-t)}$

Parciální derivaci podle S nahradíme centrální diferencí, parciální derivaci podle t zpětnou diferencí

$$\frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{k} + rih\frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} + \frac{1}{2}\sigma^2 h^2 i^2 \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2} = rf_{i,j}$$

$$\boldsymbol{f_{i,j-1} = a_i f_{i-1,j} + b_i f_{i,j} + c_i f_{i+1,j}},$$

$$i = 1,2,\cdots,m-1, \qquad j = n-1, n-2, \cdots\cdots, 1, 0$$

$$a_i = \tfrac{1}{2}k(\sigma^2 i^2 - ri),\ b_i = 1 - k(\sigma^2 i^2 + rh^2),\ c_i = \tfrac{1}{2}k(\sigma^2 i^2 + ri)$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1j} \\ f_{2j} \\ \cdots \\ f_{m-1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,j-1} - a_1 f_{0j} \\ f_{2,j-1} \\ \cdots \\ f_{m-2,j-1} \\ f_{m-1,j+1} - c_{m-1} f_{mj} \end{pmatrix}$$

Pro každé j se řeší taková soustava rovnic. Program: FEMLAB.

Třídiagonální matice

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & u_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & u_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_1 u_2 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_2 & \alpha_2 u_2 + \beta_2 & \beta_2 u_3 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_3 u_3 + \beta_3 & \beta_3 u_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n & \alpha_n u_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & b_2 - \alpha_2 u_2 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} - \alpha_{n-1} u_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_n & b_n - \alpha_n u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_1/\beta_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & c_2/\beta_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n-1}/\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

12. Soustavy algebraických lineárních rovnic – numerické řešení

Prvky matice soustavy $\boldsymbol{A}$ i prvky vektoru pravé strany **b** mohou být zatíženy chybami měření, nebo chybami vzniklými v průběhu výpočtu. V tom případě jsou vhodnější iterační metody. Otázkou je, za jakých podmínek kterou iterační metodu zvolit. Částečnou odpovědí je **podmíněnost matice**, která souvisí s normou matice.

Norma matice

Každé čtvercové matici $\boldsymbol{A}$ n-tého řádu přiřadíme číslo $\|\boldsymbol{A}\|$, normu matice, takové, že platí

1. $\|\boldsymbol{A}\| \geq 0$ a $\|\boldsymbol{A}\| = 0$ právě když $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$,
2. $\|\alpha\boldsymbol{A}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{A}\|$,
3. $\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$,
4. $\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\|$.

Ze 4. vlastnosti vyplývá, že maticová norma je analogická k normě vektoru:

$$\|\boldsymbol{Ax}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|.$$

Normu matice můžeme odvodit z normy vektoru:

Řádková norma matice

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

$$\|\boldsymbol{A}\|_R = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

z krychlové normy vektoru $\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$.

Sloupcová norma matice

$$\|\boldsymbol{A}\|_S = \max_{j=1,\cdots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

z oktaedrické normy normy vektoru $\|\mathbf{x}\| = \sum_i |x_i|$.

Euklidovská norma matice

$$\|\boldsymbol{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Podobá se euklidovské normě vektoru $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$.

MATLAB – norma matice:

řádková:	*sloupcová:*	*euklidovská:*
>> norm(A,inf)	*>> norm(A,1)*	*>> norm(A,'fro')*
>> max(sum(abs(A')))	*>> max(sum(abs(A)))*	*>> sqrt(sum(diag(A' * A)))*

Podmíněnost soustavy (matice) $\boldsymbol{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\delta\mathbf{b}, \delta\mathbf{x}$ označíme vektory chyb pravé strany, řešení. Potom $\boldsymbol{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$, $\boldsymbol{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - \boldsymbol{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} - \mathbf{b}$ a tedy $\delta\mathbf{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\delta\mathbf{b}$. Pro normy platí $\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{b}\|$. Je $\|\mathbf{b}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\mathbf{x}\|$. Pro součin je $\|\mathbf{b}\|\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|x\|\|\delta\mathbf{b}\|$. Po vydělení

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\boldsymbol{A}\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Číslo $\|\boldsymbol{A}\|\|A^{-1}\|$ se nazývá ***číslo podmíněnosti soustavy***. Je nejmenší horní odhad poměru relativní chyby řešení a relativní chyby pravé strany.
MATLAB – číslo podmíněnosti: >> cond(A)

Iterační metody

Má-li soustava $\boldsymbol{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení $\mathbf{x}^* = \boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{b}$, upravíme ji na vhodný iterační tvar

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{B}\,\mathbf{x} + \mathbf{c},$$

který určí posloupnost postupných aproximací s libovolnou volbou počáteční, nulovou aproximací

$$x^{(0)},\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}. \tag{1}$$

Ukončení výpočtu je řízeno buď počtem iterací, nebo podmínkou

$$\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| < \varepsilon.$$

Postačující podmínka konvergence posloupnosti postupných aproximací řešení

je norma $\|\boldsymbol{B}\| \leq q < 1$. Potom posloupnost (1) konverguje pro libovolnou nultou aproximaci a je

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{c} = \mathbf{x}^*.$$

Odhad chyby výpočtu

Pro normu odchylky libovolné aproximace od řešení je

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| = \left\|\boldsymbol{B}\,\mathbf{x}^{(k-1)} - \boldsymbol{B}\,\mathbf{x}^*\right\| = \left\|\boldsymbol{B}\big(\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{x}^{(k-1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\big)\right\|$$
$$\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\right\| \leq \|\boldsymbol{B}\|\big(\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| + \left\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\|\big)$$

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| \leq \frac{q}{1-q}\,\varepsilon.$$

Jacobiova metoda

Matici $\boldsymbol{A}$ soustavy rozložíme na součet diagonální matice $\boldsymbol{D}$ (s nenulovými diagonálními prvky) a matici $\boldsymbol{C}$ s nulovou diagonálou, tj.

$$(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{C})\,\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

potom

$$\boldsymbol{D}\,\mathbf{x} = -\boldsymbol{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\,\mathbf{x} + \boldsymbol{D}^{-1}\mathbf{b}.$$

To není nic jiného, než že rovnice přerovnáme tak, aby na diagonále matice soustavy byly nenulové největší prvky. Matice bude diagonálně dominantní. Potom z každé rovnice vypočítáme neznámou na diagonále.
Rozepsáno do souřadnic:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), i = 1, \cdots, n.$$

MATLAB – Jacobiova metoda:

```
>> U=triu(A,1)
>> L=tril(A,-1)
>> D=A-U-L
>> M=(-1)*inv(D)*(U+L)
>> v=inv(D)*b
>> x1=M*x0+v
>> x2=M*x1+v ....
```

Gauss-Seidlova metoda:

```
>> U=triu(A,1)
>> L=tril(A,-1)
>> D=A-U-L
>> M=(-1)*inv(D+L)*U
>> v=inv(D+L)*b
>> x1=M*x0+v
>> x2=M*x1+v ....
```

Gaussova-Seidelova metoda

Vychází z Jacobiovy iterační metody. Ve výpočtu i-té souřadnice k+1 aproximace se používá vypočítaných i-1 souřadnic této aproximace. Vzorec pro i-tou souřadnici je

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)}\right), i = 1, \cdots, n.$$

Jacobiova metoda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}, \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\|_R = max\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5} = q$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} \\ \frac{23}{25} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{57}{100} \\ \frac{51}{50} \\ -\frac{273}{500} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.57 \\ 1.02 \\ -0.546 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{59}{125} \\ \frac{904}{625} \\ -\frac{241}{500} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.472 \\ 1.4464 \\ -0.482 \end{pmatrix},$$

$$\left\|\mathbf{x}^{(4)} - \mathbf{x}^{(3)}\right\| = \|(-0.098; 0.4264; 0.064)\| = 0.44217$$

$$\left\|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{*}\right\| \leq 4.0.44217 \leq 1.6, \quad \mathbf{x}^{*} = (0.5; 1; -0.5)$$

Gaussova-Seidlova metoda

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{12}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.6 \\ -0.48 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.61 \\ 0.948 \\ -0.4884 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matic

Matice $\boldsymbol{A}$ je čtvercová řádu *n*. Číslo λ takové, že soustava

$$\boldsymbol{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}, \text{ tj. } (\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E})\mathbf{x} = \mathbf{o},$$

má nenulové řešení, se nazývá ***vlastní číslo*** matice $\boldsymbol{A}$ a odpovídající řešení $\boldsymbol{x}$ se nazývá ***vlastní vektor.***
Vlastní čísla jsou řešení algebraické rovnice *n*-tého stupně $|\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E}| = 0$,
která se nazývá ***charakteristická rovnice*** matice $\boldsymbol{A}$.

Čtvercová matice má právě *n* vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (počítaných s násobností).
Diagonální matice $\boldsymbol{\Lambda} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ se nazývá ***spektrální matice*** k matici $\boldsymbol{A}$.
Je-li $\boldsymbol{A}$ symetrická matice potom platí:

1. Všechna vlastní čísla symetrické matice jsou reálná.
2. Různým vlastním číslům symetrické matice odpovídají ortogonální vlastní vektory.
3. *k*-násobnému vlastnímu číslu symetrické matice odpovídá *k* ortogonálních vektorů.
4. Je-li navíc matice pozitivně definitní, tj. $\mathbf{x}\,\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}^T > 0, \mathbf{x} \neq \boldsymbol{o}$, jsou vlastní čísla kladná.

MATLAB – vlastní čísla pro A: >> eig(A)

Matice $\boldsymbol{A}$ je ***podobná*** matici $\boldsymbol{B}$, jestliže existuje regulární matice $\boldsymbol{P}$ taková, že

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}.$$

Podobnost matic je ekvivalence: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ potom $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$ potom $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$.

5. Podobné matice mají stejná vlastní čísla.
6. Je-li $\mathbf{x}$ vlastní vektor matice $\boldsymbol{A}$, potom $\boldsymbol{P}\,\mathbf{x}$ je vlastní vektor podobné matice $\boldsymbol{B}$.
7. $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{U}$, kde $\boldsymbol{U}$ má ve sloupcích vlastní vektory matice $\boldsymbol{A}$.
8.

Úplný problém vlastních čísel – nalezení všech vlastních čísel matice.

Mocninná metoda
Částečný problém vlastních čísel matice, nalezení nejmenšího nebo největšího vlastního čísla.
Existuje-li jediné vlastní číslo λ_1 s největší absolutní hodnotou, pak všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ srovnáme podle velikosti absolutních hodnot

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Zvolíme vektor $\mathbf{x}^{(0)}$ a vyjádříme ho jako lineární kombinaci všech vlastních vektorů

$$\mathbf{x}^{(0)} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n.$$

Rovnost vynásobíme maticí $\boldsymbol{A}$ zleva $\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}^{(0)} = \alpha_1\boldsymbol{A}\,\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{A}\,\mathbf{u}_n$

použijeme definici vlastního čísla a označíme $\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(1)}$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \alpha_1\lambda_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{u}_n.$$

Postup zopakujeme k-1 krát

$$\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}^{(k-1)} = \alpha_1\lambda_1^{k-1}\boldsymbol{A}\,\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^{k-1}\boldsymbol{A}\,\mathbf{u}_n$$

Potom

$$\mathbf{x}^{(k)} = \alpha_1\lambda_1^{k}\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^{k}\mathbf{u}_n$$

Označíme

$$\mathbf{x}^{(k)} = \lambda_1^{k}(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_k)$$

Pro další aproximaci je

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \lambda_1^{k+1}(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_{k+1})$$

Pro j tou složku vektoru $\boldsymbol{w}_k$ platí:

$w_{kj} = \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k u_{2j} + \alpha_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k u_{3j} + \cdots + \alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k u_{nj}$, kde $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$, tak v limitě složek

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_j^{(k+1)}}{x_j^{(k)}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_1^{k+1}}{\lambda_1^{k}} = \lambda_1.$$

Vlastní čísla

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\ |\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 1, \mathbf{u}_1 = (1,-1,0),\ \ \lambda_2 = 2, \mathbf{u}_2 = (0,0,1),\ \ \lambda_3 = 3, \mathbf{u}_3 = (1,1,0).$

$$\boldsymbol{AU} = \boldsymbol{U\Lambda}\text{:}\ \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Mocninná metoda

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\boldsymbol{A}\mathbf{x}^{(0)}$	$\boldsymbol{A}^2\mathbf{x}^{(0)}$	$\boldsymbol{A}^3\mathbf{x}^{(0)}$	$\boldsymbol{A}^4\mathbf{x}^{(0)}$	$\boldsymbol{A}^5\mathbf{x}^{(0)}$	$\boldsymbol{A}^6\mathbf{x}^{(0)}$	$\boldsymbol{A}^7\mathbf{x}^{(0)}$	$\boldsymbol{A}^8\mathbf{x}^{(0)}$	$\boldsymbol{A}^9\mathbf{x}^{(0)}$	$\boldsymbol{A}^{10}\mathbf{x}^{(0)}$
5	24	111	504	2268	10161	45433	202833	905238	4038939
4	15	60	252	1089	4779	21141	93906	417987	1862460
2	6	21	81	333	1422	6201	27342	121248	539235

Zdroj: autor

$\frac{x_1^{10}}{x_1^9} = 4.462, \frac{x_2^{10}}{x_2^9} = 4.456, \frac{x_3^{10}}{x_3^9} = 4.447\ , \lambda_1 = \frac{1}{3}(4.462 + 4.456 + 4.447) = 4.447 \doteq 4.46$

$\mathbf{u}_1 = (4\,038\,939, 1\,862\,460, 539\,235)$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 12\lambda - 3 = 0, \lambda_1 = 4.46$$